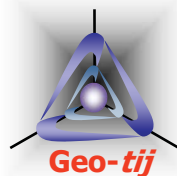


Subloading tij model への時間効果 特性の導入

－ 陰解法の定式化を含めて －

tij地盤解析研究会・(株)地域地盤環境研究所・中部大学
中井 照夫



1

はじめに

実務における地盤の解析は、そのほとんどが、弾性、弾・完全塑性 (Mohr-Coulomb, Drucker-Prager)、Cam-clay までである。また、地盤の挙動は複雑なので精緻な構成モデルを使っても有意な結果が得られないと言われたりする。しかし、解析結果の信頼度は、解析に用いる構成モデルの適用性とそのレベルにより大きく変わる。言い換えれば、要素レベルで土の挙動が説明出来ないモデルを使って有意な結果が得られないのは必然である。前回のセミナーでは、これらのモデルの特性と避けられない問題点について解説するとともに、構成モデルが備えるべき特性とそれらを包括的に考慮出来るモデル (Subloading tij model) について説明した。

今回のセミナーでは復習を兼ねてモデルの特長を概説するとともに、陰解法によるモデルの定式化について話す。

粘性土地盤などの長期変形・破壊問題では間隙水圧の影響とともに材料としての時間効果特性も大切である。今回のセミナーでは陰解法の定式化の中で時間効果特性を考慮する方法についても解説する。

材料特性としての時間効果特性は、既往の弾・粘塑性論を応用したモデルがこれまでに幾つか提案されているが、これらは時間効果特性を考えない弾塑性論とは別物となっている。ここでは、周知の時間効果特性に関する実験事実に着目し、下負荷面の考え方を応用すれば、現在の弾塑性モデルの延長として簡単に陰解法でのモデル化が可能であることを示す。

2

地盤材料のモデルで考慮すべき特性と計算の効率化

- | | | |
|--|---|-------------------------------------|
| (1) 中間主応力 が変形・強度特性におよぼす影響 | } | t_{ij} の概念 |
| (2) 引張り応力の発生しない 構成モデル | | |
| (3) 変形・強度特性におよぼす間隙比や拘束応力の影響
「 過圧密土 」 | } | 下負荷面の考え方と
その拡張(密度とボン
ディングを考慮) |
| (4) 自然堆積粘土等に見られる構造の発達した土の挙動
「 自然堆積土 」 | | |
| (5) ひずみ増分方向 におよぼす応力増分方向の影響 | } | パラメータを増やさず塑
性ひずみ増分の分割 |
| (6) 時間効果特性 すなわちレオロジー特性 | } | 正規圧密線(NCL)の
シフトと下負荷面 |
| + | | |
| (7) 計算の 効率化と誤差の最小化
「 時間効果特性を含めて 」 | } | 陰解法
(Return mapping) |

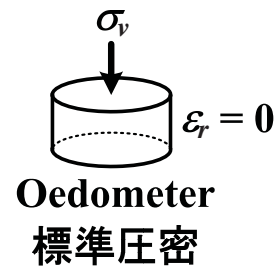
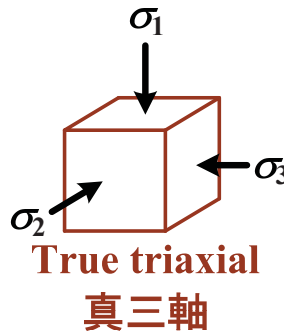
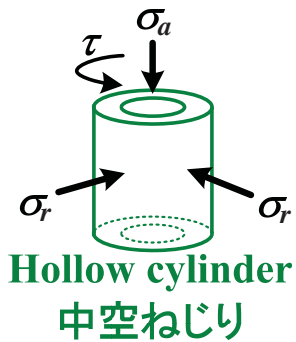
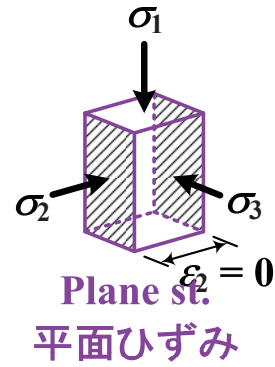
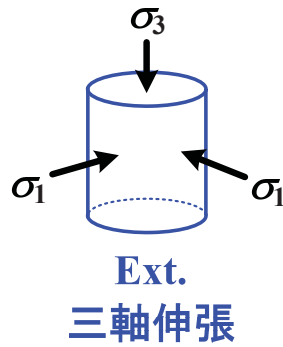
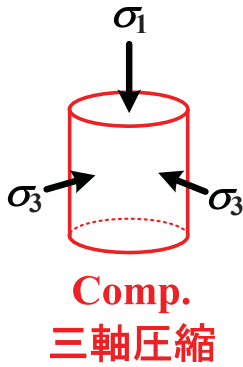
3

t_{ij} の概念

- **中間主応力**が変形・強度特性におよぼす影響
- **引張り応力の発生しない**構成モデル

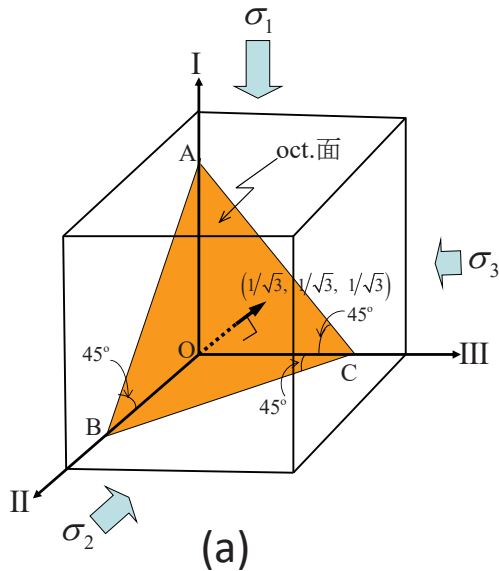
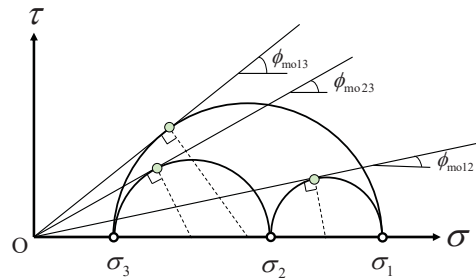
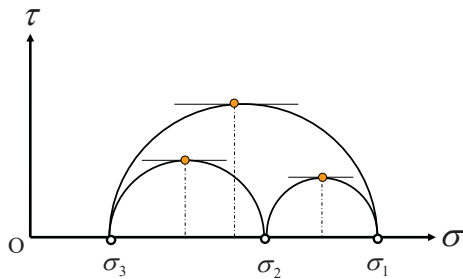
4

要素試験で経験する3次元応力状態

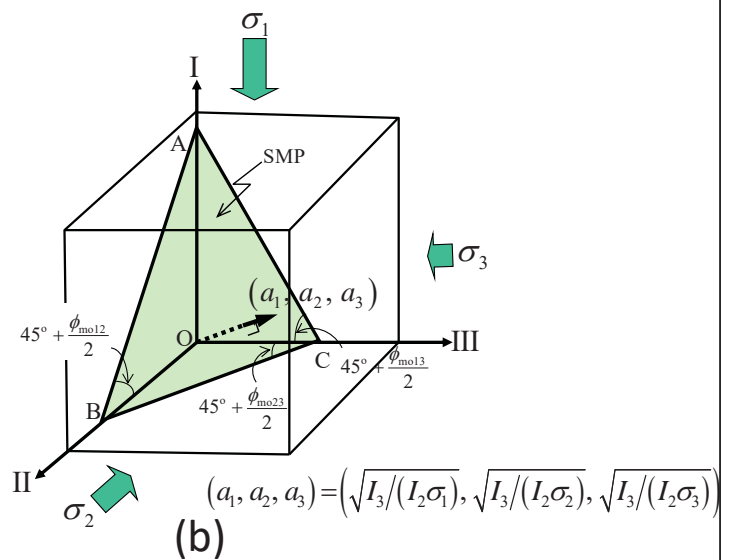


5

正八面体面と空間活動面



正八面体面(oct.面)

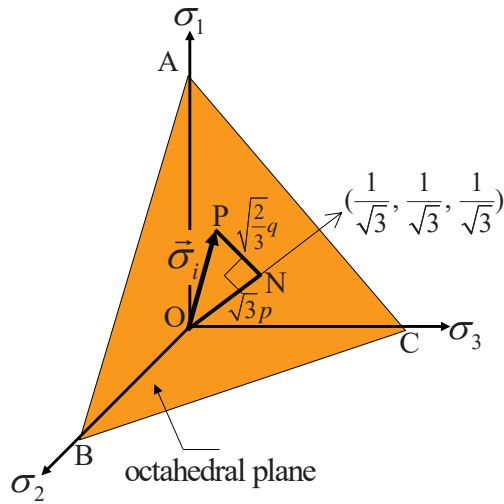


空間活動面(SMP)

$(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{I_3/(I_2\sigma_1)}, \sqrt{I_3/(I_2\sigma_2)}, \sqrt{I_3/(I_2\sigma_3)})$
Matsuoka & Nakai (1974) 6

変形・強度特性におよぼす間隙比や拘束応力の影響

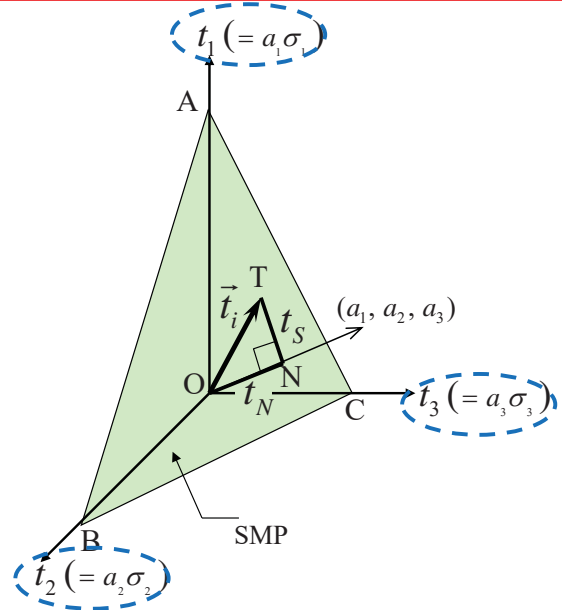
既往のモデル(Cam clay等)の
応力パラメータ



$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{1}{3}} ON = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ q = \sqrt{\frac{3}{2}} NP = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{cases}$$

t_{ij} 概念に基づいたモデルの
応力パラメータ

$$t_1 = a_1 \sigma_1, t_2 = a_2 \sigma_2, t_3 = a_3 \sigma_3$$

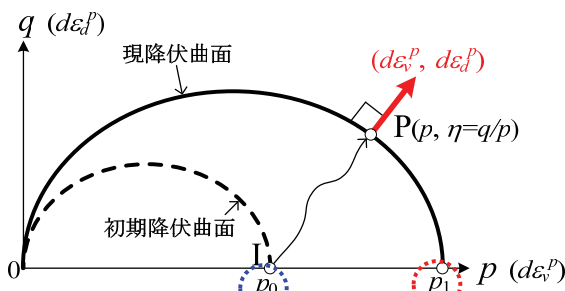


$$\begin{cases} t_N = ON = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 \\ t_S = NT = \sqrt{(t_1 a_2 - t_2 a_1)^2 + (t_2 a_3 - t_3 a_2)^2 + (t_3 a_1 - t_1 a_3)^2} \end{cases}$$

Nakai & Mihara (1984) 7

例として正規圧密土の多次元モデルに t_{ij} の概念を導入

Cam clay model



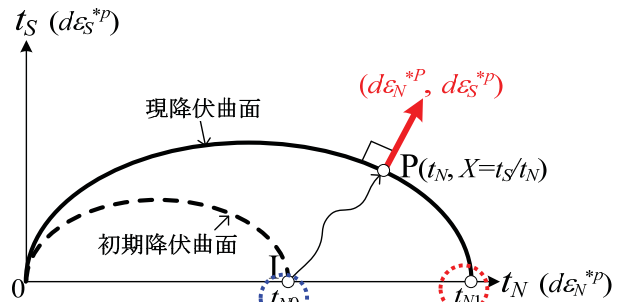
(p, q)面上で表したCam clay型モデルの降伏曲面と塑性ひずみ増分方向

$$f = F(p, \eta = q/p) - H = 0$$

$$\begin{cases} F = \ln \frac{p_1}{p_0} = \ln \frac{p}{p_0} + \zeta(\eta) \\ H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} \end{cases}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \langle \Lambda \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \left\langle \frac{dF}{h^p} \right\rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

t_{ij} clay model



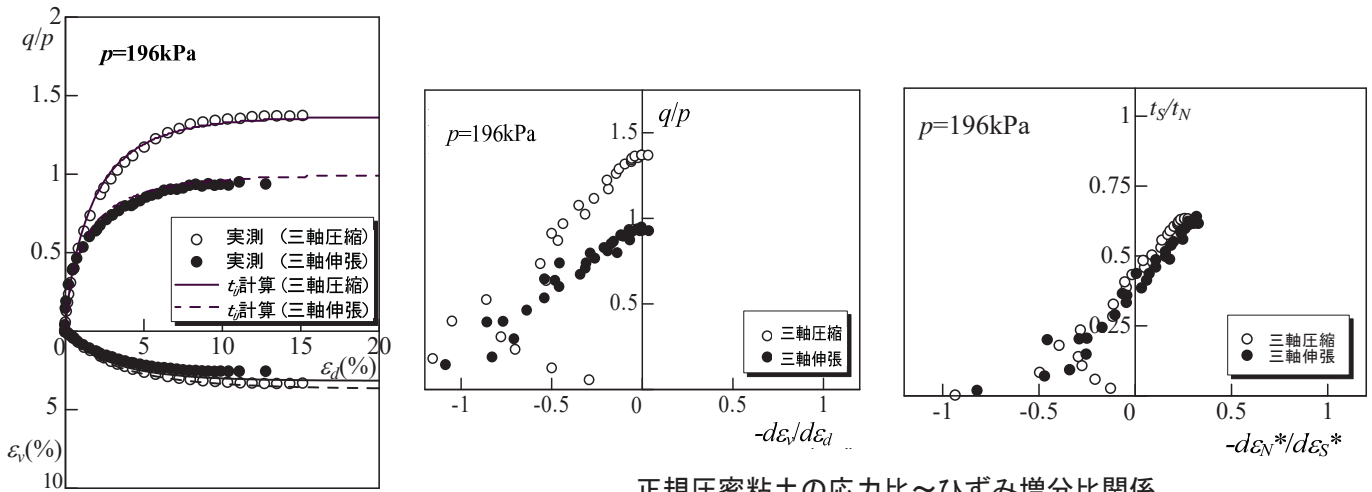
(t_N, t_S)面上で表した t_{ij} modelの降伏曲面と塑性ひずみ増分方向

$$f = F(t_N, X = t_S / t_N) - H = 0$$

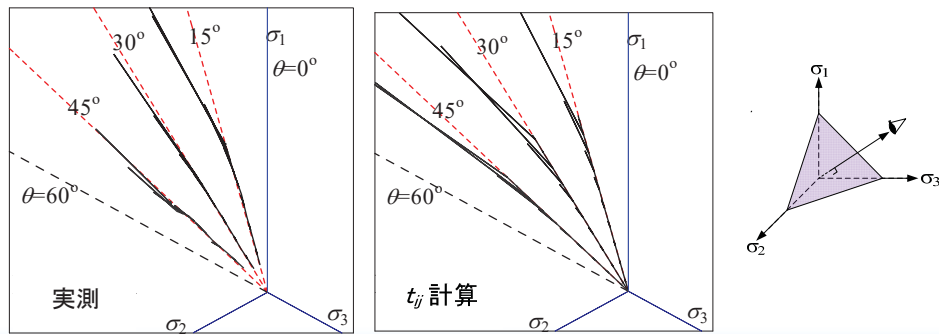
$$\begin{cases} F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) \\ H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} \end{cases}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \langle \Lambda \rangle \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} = \left\langle \frac{dF}{h^p} \right\rangle \frac{\partial F}{\partial t_{ij}}$$

正規圧密粘土の実測値と解析結果

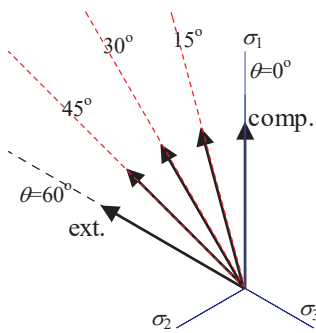


正規圧密粘土の応力・ひずみ関係の実測値と解析結果

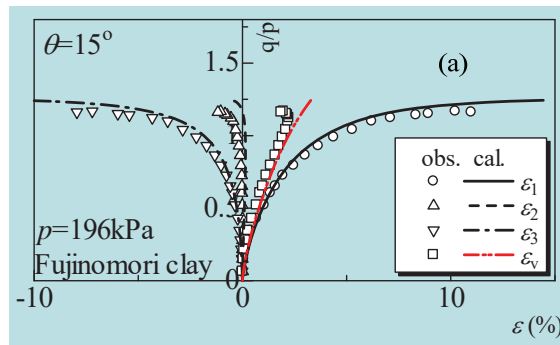


三主応力制御試験の正八面体面上のひずみ増分方向の実測値と解析結果

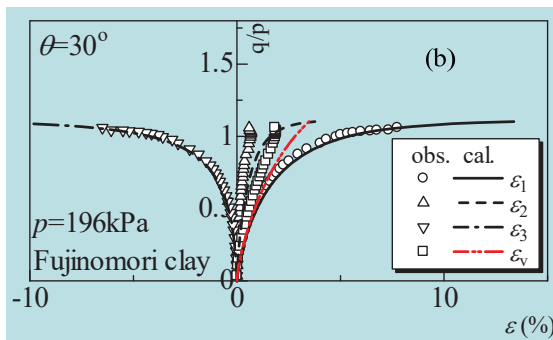
正規圧密粘土の3主応力制御試験



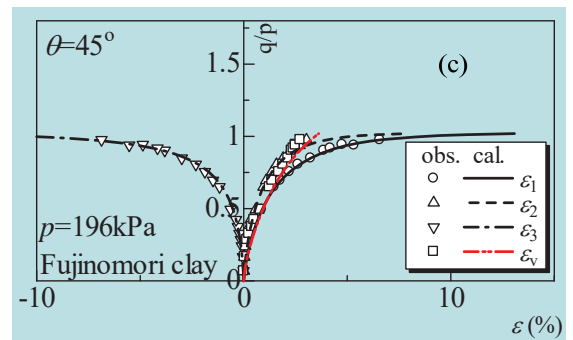
正八面体面状の応力経路



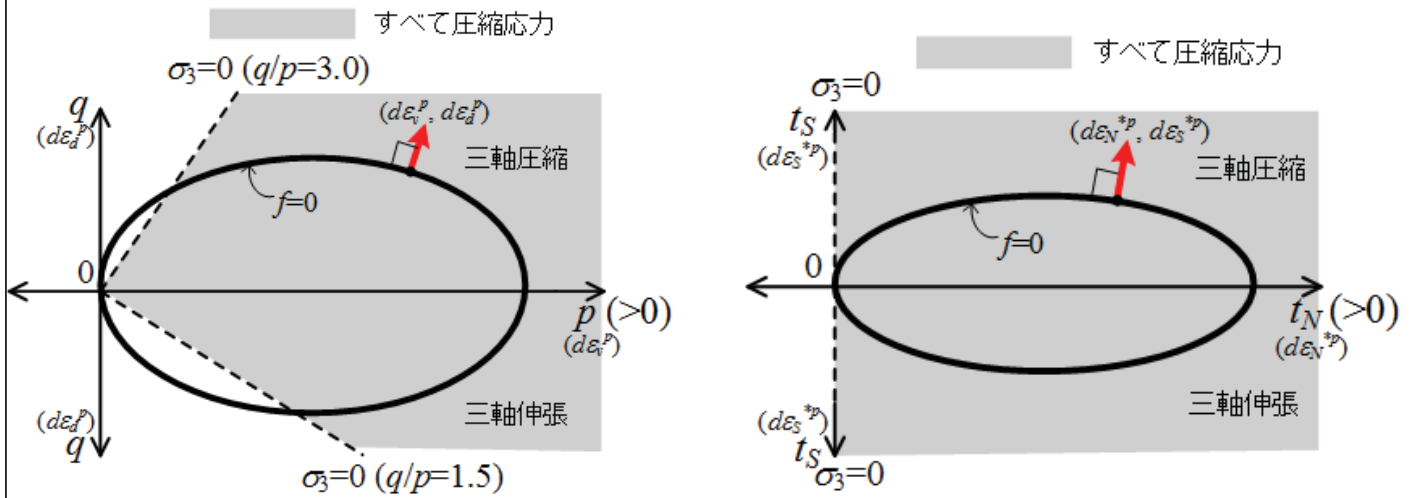
θ=15°



θ=30°



θ=45°



11

下負荷面の考え方とその拡張

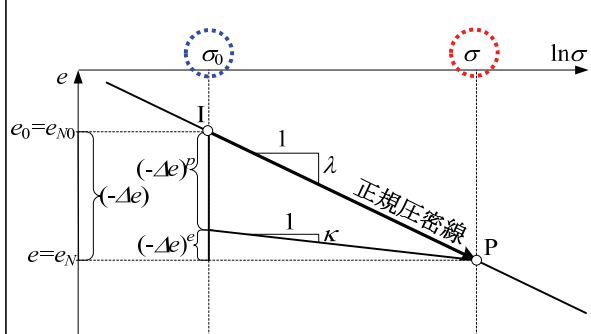
- 密度とボンディングの考慮 -

- 変形・強度特性におよぼす間隙比や拘束応力の影響
「過圧密土」
- 自然堆積粘土等に見られる構造の発達した土の挙動
「自然堆積土」

12

弾塑性論による正規圧密土の1次元モデル

正規圧密土ではよく知られている $e-\ln\sigma$ の直線関係を弾塑性モデル的に表現する



正規圧密粘土(NC clay)の間隙比変化

λ : 圧縮指数
 κ : 膨潤指数

$$(-\Delta e)^p = (-\Delta e) - (-\Delta e)^e = \lambda \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} - \kappa \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

$$\begin{cases} F = \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} \\ H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} \end{cases}$$

$$f = F - H = 0$$

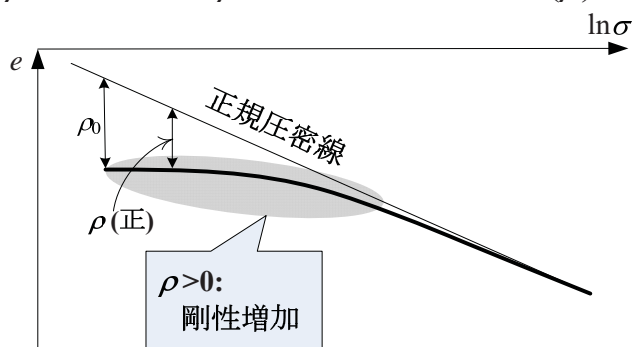
適応条件: $df = 0$

$$df = dF - dH = \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{d(-e)^p}{\lambda - \kappa} = 0$$

$$d\varepsilon^p = \frac{d(-e)^p}{1+e_0} = \frac{dF}{\frac{1+e_0}{\lambda - \kappa}}$$

過圧密土の1次元モデル

下負荷面の考え方(橋口, 1977, 1980)を1次元の $e-\ln\sigma$ 関係に適用する。 ρ の発展則 $d\rho$ を正の増加関数 $G(\rho)$ を使って表すだけでよい。



過圧密土の間隙比(e) \sim $\ln\sigma$ 関係

$\rho > 0$:
剛性増加

正規圧密土同様

$$\begin{cases} F = \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \\ H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} \end{cases}$$

$$(-\Delta e)^p = \lambda \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} - (\rho_0 - \rho) - \kappa \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

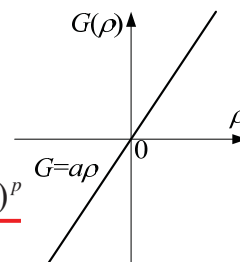
$$f = F - \left\{ H + \frac{\rho_0 - \rho}{\lambda - \kappa} \right\} = 0$$

適応条件:

$$df = 0$$

ρ の発展則:

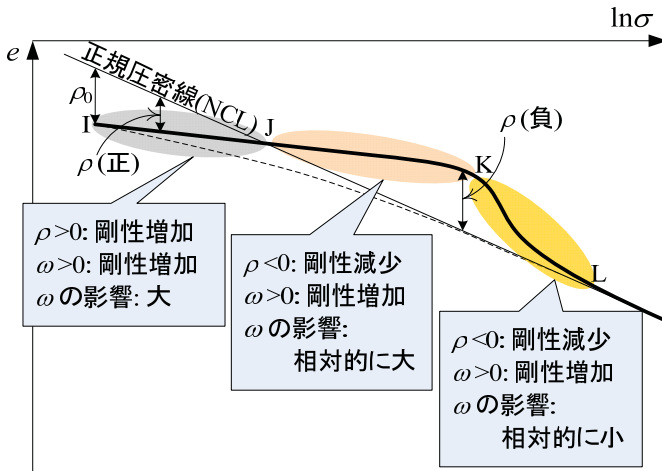
$$d\rho = -G(\rho) \cdot d(-e)^p$$



$$d\varepsilon^p = \frac{d(-e)^p}{1+e_0} = \frac{dF}{\frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \{1 + G(\rho)\}}$$

自然堆積土の1次元モデル

上負荷面の考え方(浅岡他, 2000a)を参考に、下負荷面だけでモデル化。
 ボンディング効果を ω で表すと、 ρ の発展則 $d\rho$ に ω を加えるだけ。
 ω は常に剛性増加の効果を持ち、 $Q(\omega)$ も $G(\rho)$ 同様正の増加関数。



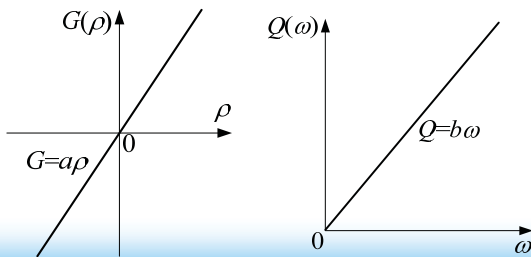
$$f = F - \left\{ H + \frac{\rho_0 - \rho}{\lambda - \kappa} \right\} = 0$$

適応条件:
 $df = 0$
 ρ と ω の発展則:

$$d\rho = -\{G(\rho) + Q(\omega)\} \cdot d(-e)^p$$

$$d\omega = -Q(\omega) \cdot d(-e)^p$$

自然堆積土の間隙比(e) ~ $\ln \sigma$ 関係



$$d\varepsilon^p = \frac{d(-e)^p}{1 + e_0} = \frac{dF}{\frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \{1 + G(\rho) + Q(\omega)\}}$$

よく知られている正規圧密土の e - $\log \sigma$ 関係に $G(\rho)$ を加えると過圧密特性が考慮でき、更に $Q(\omega)$ を加えると自然堆積土のモデルになる。

正規・過圧密・自然堆積土の多次元モデル (Subloading t_{ij} model) (1/2)

Nakai & Hinokio(2004), Nakai et.al.(2011), Nakai(2012)

1D modelの (σ_0, σ) を (t_{N0}, t_{N1}) に置換え、 t_{ij} 空間で流れ則をかながえるだけで3D化をはかれる。

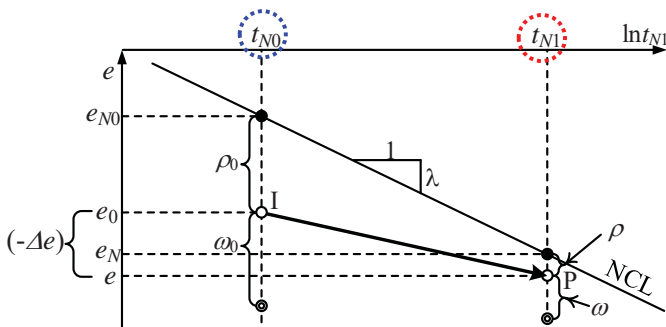
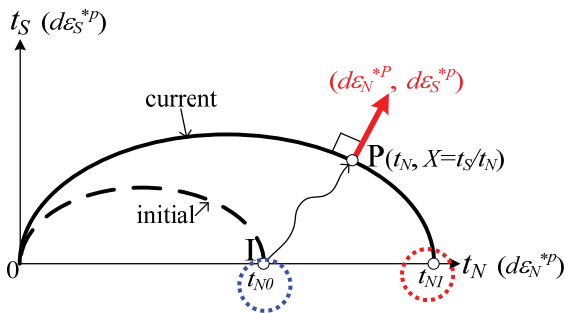
$$(-\Delta e)^p = (e_0 - e) - (-\Delta e)^e = (-\Delta e) - (-\Delta e)^e$$

$$= \lambda \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} - (\rho_0 - \rho) - \kappa \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}}$$



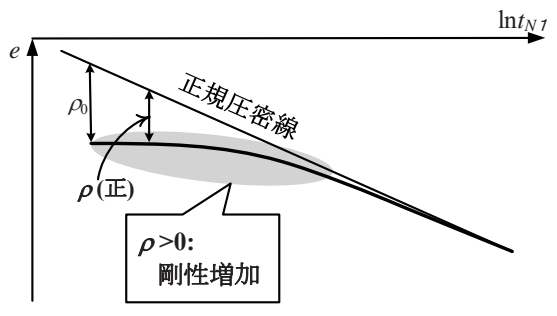
$$\square f = F - \left\{ H + \frac{\rho_0 - \rho}{\lambda - \kappa} \right\} = 0$$

$$\begin{cases} F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) \\ H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} \end{cases}$$



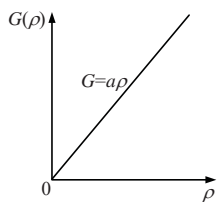
$$\square d\varepsilon_{ij}^p = \langle \Lambda \rangle \frac{\partial F}{\partial t_{ij}}$$

$$f = F - \left\{ H + \frac{\rho_0 - \rho}{\lambda - \kappa} \right\} = 0$$



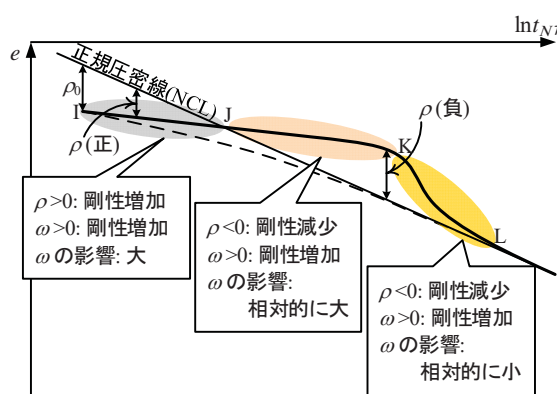
過圧密土の $e \sim \ln t_{N1}$ 関係

過圧密土:



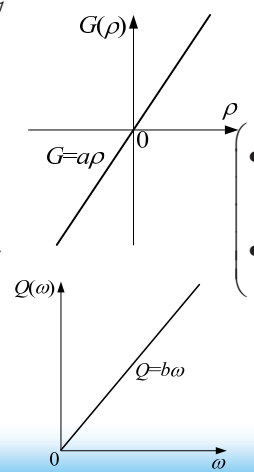
$$d\rho = -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X)}{t_N} \Lambda$$

N.B.
等方圧縮時には1D modelの発展則と一致
 $d\rho = -G(\rho) \cdot d(-e)^p$



自然堆積土の $e \sim \ln t_{N1}$ 関係

自然堆積土:



$$d\rho = -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \Lambda$$

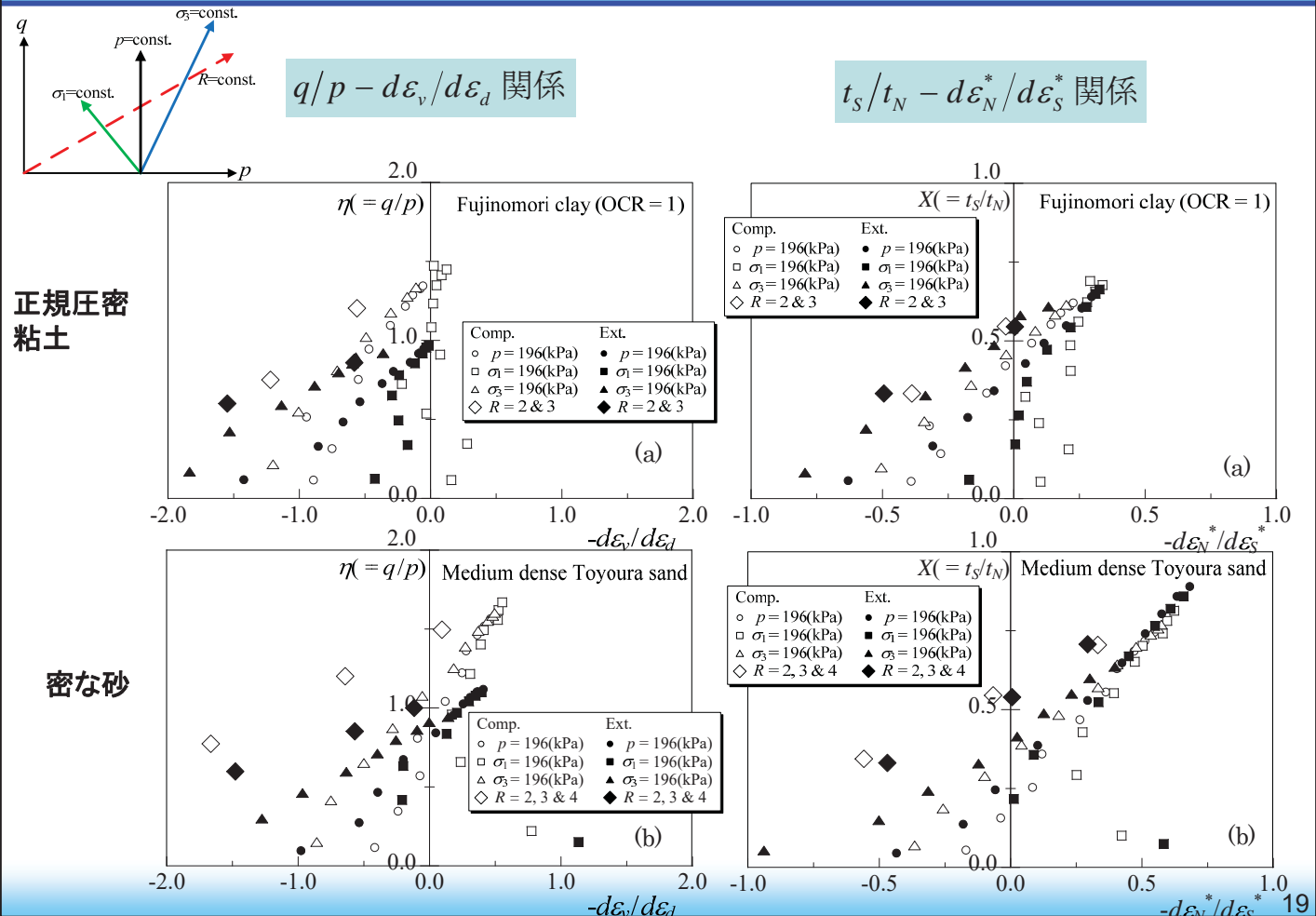
$$d\omega = -(1+e_0)\sqrt{3} Q \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Lambda$$

N.B.
等方圧縮時には1D modelの発展則と一致
 $d\rho = -\{G(\rho) + Q(\omega)\} \cdot d(-e)^p$
 $d\omega = -Q(\omega) \cdot d(-e)^p$

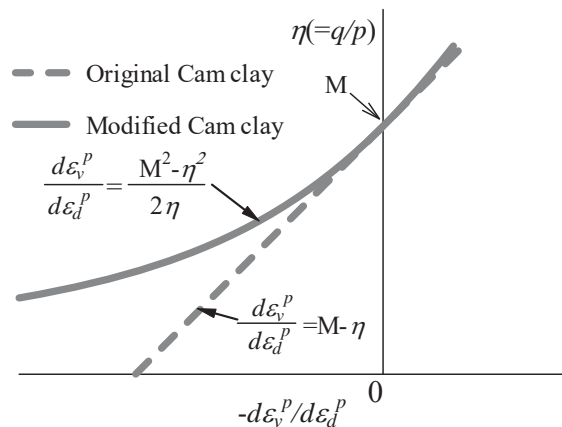
パラメータを増やさず塑性ひずみ増分の分割

- ひずみ増分方向におよぼす応力増分方向の影響

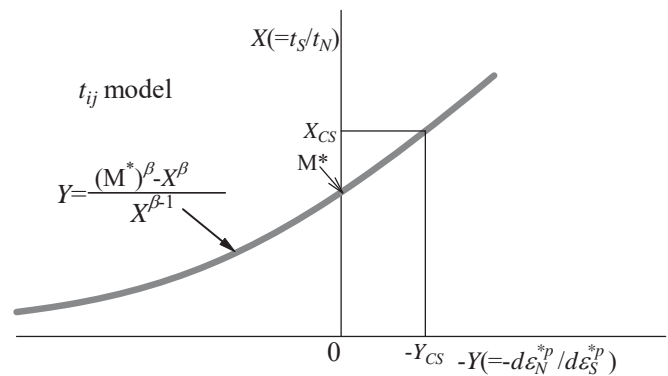
ひずみ増分方向の応力経路依存性の検討 (stress-dilatancy 関係)



Cam clay および t_{ij} (AF) model の stress-dilatancy 関係



Cam clay model の stress-dilatancy 関係



t_{ij} (AF) model の stress-dilatancy 関係

応力経路依存性は古くから知られている実験事実であるにも拘わらず、最近では注意があまり払われていない。

いくつかのモデルでは降伏関数を複数考えることで応力経路依存性を説明しているが、その場合当然のことながら多くの材料パラメータが必要。

提案モデルでは、塑性ひずみ増分を関連流動則(AF)成分と等方圧縮(IC)成分に分けるが、降伏関数を増やさず応力経路依存性を説明できるモデル化を行っている。

(IC)成分を考慮したモデルの定式化

(AF)成分だけの塑性ひずみ増分式に下線で示した平均応力(t_N)の変化による項を加える。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{dF}{h^p} \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \cdot \frac{\partial t_{ij}}{\partial F} + L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3}$$

右辺第1および第2項が関連流動則(AF)成分、第3項が等方圧縮(IC)成分となる。
また、塑性体積ひずみ(ひずみ硬化パラメータ)増分は $L^{(IC)}$ の大きさに影響されない。

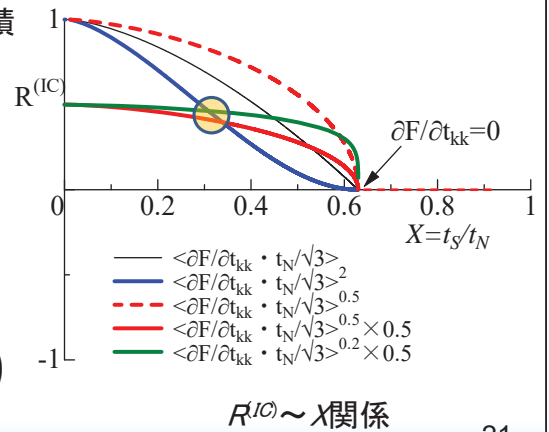
$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_{mm}^p = \frac{dF}{h^p} \frac{\partial F}{\partial t_{mm}} - L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} + L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} = \frac{dF}{h^p} \frac{\partial F}{\partial t_{mm}}$$

正の関数 $L^{(IC)}$ は応力比が大きくなるに従い小さくなり、塑性体積ひずみ増分がゼロとなる応力比($\partial F/\partial t_{kk}=0$)では、 $L^{(IC)}=0$ となる応力比の関数で与える。

$$L^{(IC)} = \frac{R^{(IC)}}{h^{p(IC)}}$$

where $h^{p(IC)} = \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \{1 + \langle G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X) \rangle\}$

$$R^{(IC)} = k^{(IC)} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^m \quad (\text{usually } k^{(IC)} = 1, m = 2)$$



$R^{(IC)} \sim X$ 関係

3Dモデルのまとめ

- $f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) = 0$

$$\begin{cases} F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), & \zeta(X) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{X}{M^*} \right)^\beta \\ \text{(where } X = t_s/t_N) \\ H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \end{cases}$$

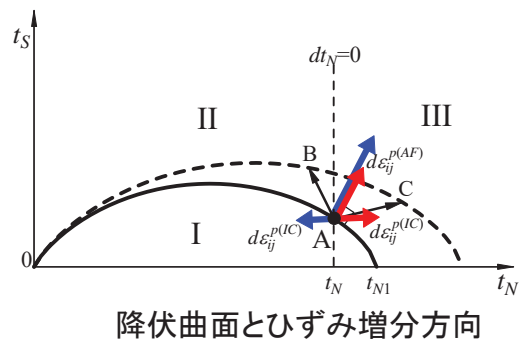
- $d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \cdot \frac{\partial t_{ij}}{\partial F} + L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3} = \underbrace{\left\{ \frac{dF}{h^p} - L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \right\}}_{(AF)} \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} + \underbrace{L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3}}_{(IC)}$

where,

$$h^p = \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} + \sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\}$$

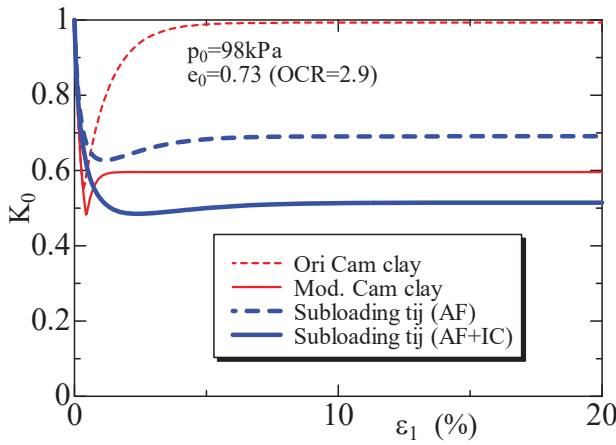
$$h^{p(IC)} = \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \{1 + \langle G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X) \rangle\}$$

負荷基準 $\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^{p(AF)} + d\varepsilon_{ij}^{p(IC)} \neq 0 & \text{if } \Lambda = \frac{dF}{h^p} \geq 0 \\ d\varepsilon_{ij}^p = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

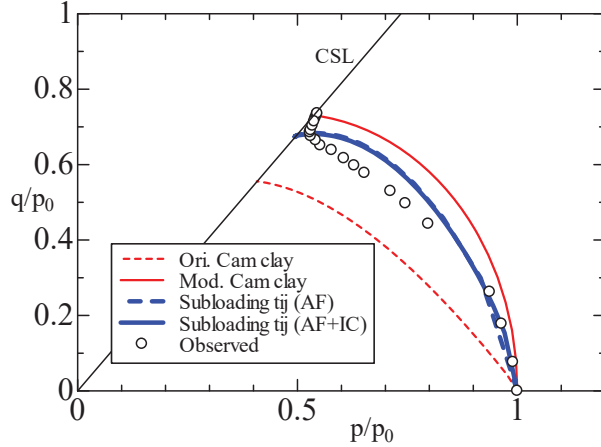
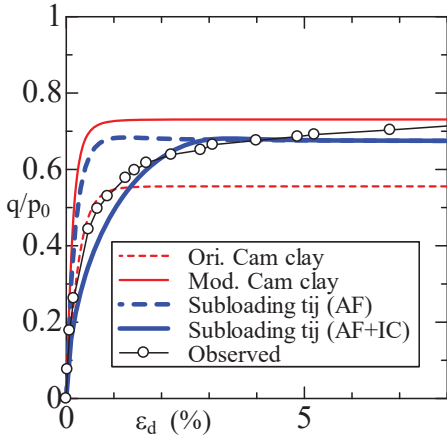


降伏曲面とひずみ増分方向

種々のモデルによる K_0 圧密および非排水せん断の解析



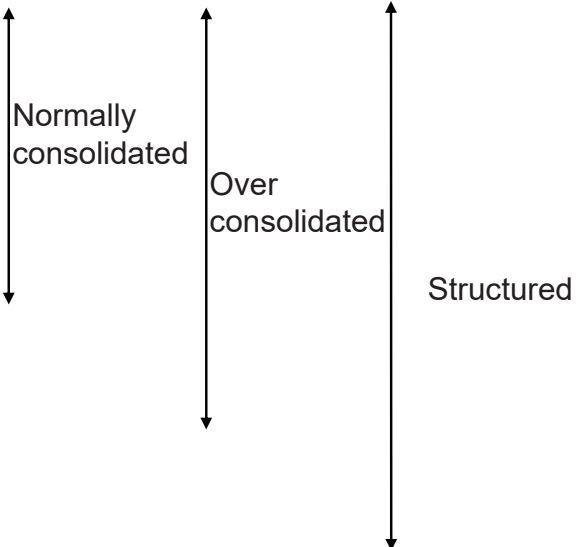
K_0 圧密試験の解析結果



正規圧密粘土の非排水挙動と解析

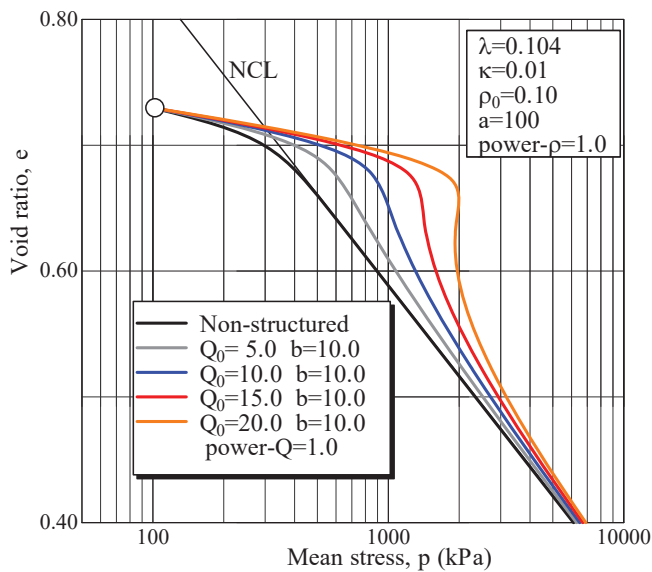
Subloadong tij model (iVersion=3)の材料パラメータ

λ	0.090 or 0.104	Same parameters as Cam clay model
κ	0.010	
$N = e_{NC}$ at $p = 98$ kPa	0.83	
$R_{cs} = (\sigma_1/\sigma_3)_{cs(comp.)}$	3.5	
v_e	0.2	Shape of yield surface
β	1.5	
a	100	Influence of density and confining pressure
k_a	8	
b	10	Influence of bonding
$Q_0 = b\omega_0$	10	
k_b	3	

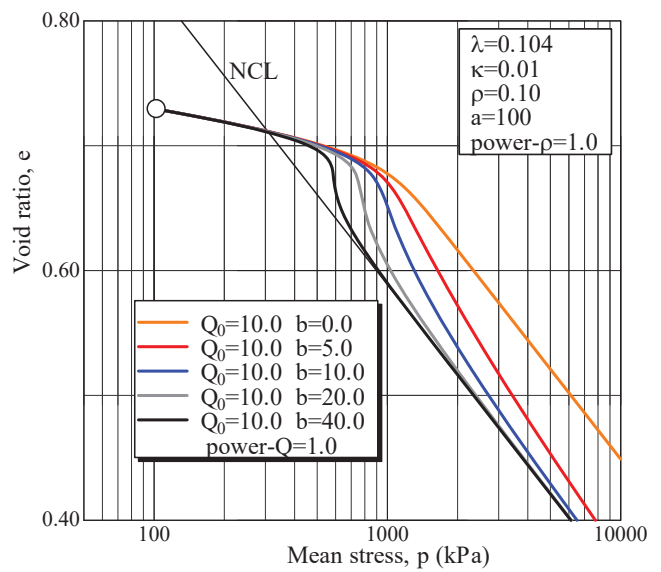


解析で用いた典型的な藤森粘土の材料パラメータを示す。

自然堆積粘土の等方圧縮試験の解析結果

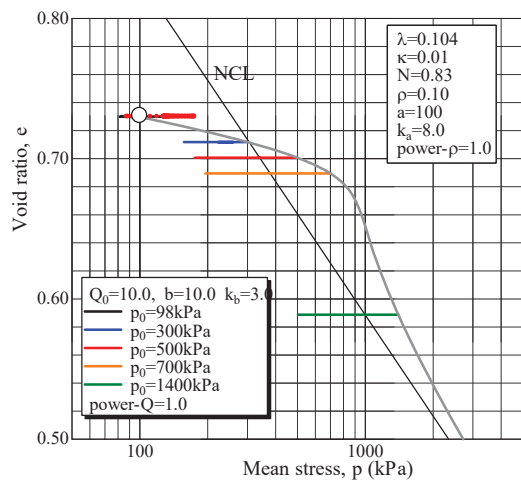


$b=10.0$ で Q_0 を変化させたときの解析結果

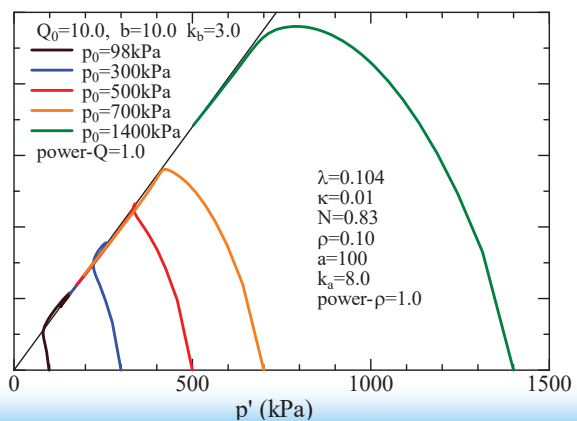
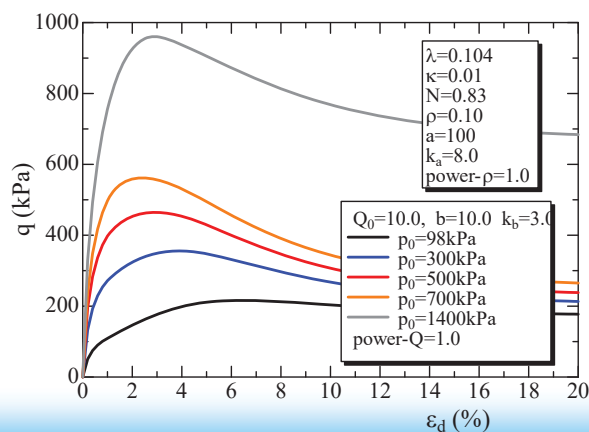


$Q_0=10.0$ で b を変化させたときの解析結果

Structured clayの非排水せん断試験の解析結果



$e_0 = 0.73$, $p_0 = 98kPa$, $Q_0 = 10.0$, $b = 10$ の初期状態から等方圧縮した後の非排水三軸圧縮試験の解析結果



正規圧密線(NCL)のシフト と下負荷面

- **時間効果特性**すなわちレオロジー特性

27

既往の粘塑性モデルと提案モデルの考え方の違い

これまでの粘土の時間依存性挙動を説明するモデルは既往の粘塑性論に基づくものがほとんどである。しかし、それらは同じ時間効果を考えない弾塑性モデルとは別物。

▶非定常流動曲面モデル

- 例えば、関口(1977), Nova(1982)
- **実時間 t が入っている**

▶超過応力型モデル

- 例えば、足立・岡(1982), Dafalias(1982), Katona(1984)
- **負荷基準がない、塑性ひずみ速度に応力速度が影響しない**

これらのモデルの特徴については松井・阿部(1984)、関口(1985)、三村・関口(1985)、橋口(1998)、三村(2011)で解説

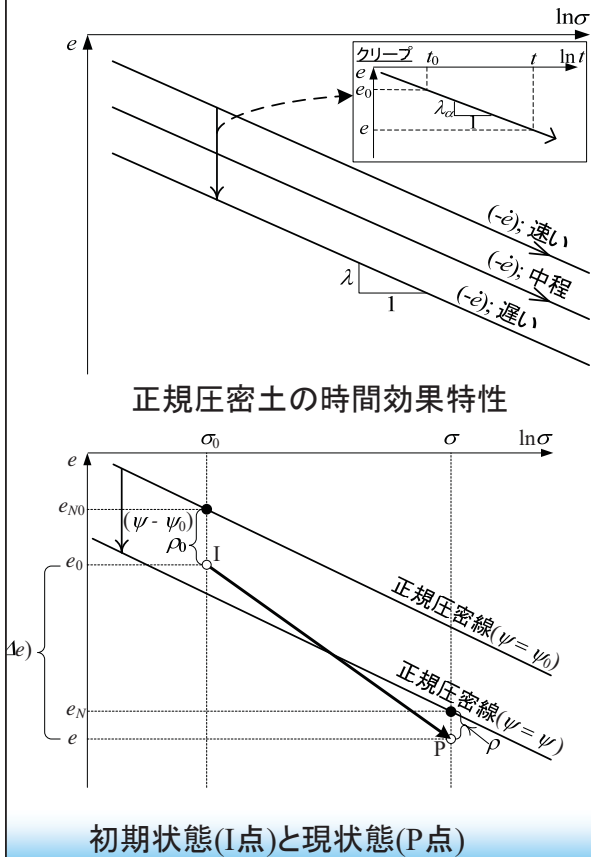
ここでは、既往の弾・粘塑性論を使うことなく、次の実験事実と下負荷面の考え方を使得時間効果特性を表現する。

- 正規圧密土の圧密時の e - $\log p$ 関係のNCLが圧密時間(ひずみ速度)に応じて平行にずれる
- 正規圧密土の2次圧密時の e - $\log t$ 関係の勾配(2次圧密係数)は載荷応力の影響を受けない

28

時間効果特性の1次元モデル

- ・正規圧密線がひずみ速度等で平行にずれることに着目(ψ で評価)。
- ・クリープ時の2次圧密係数に着目



$$(-\Delta e)^p = \lambda \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} - (\rho_0 - \rho) - (\psi_0 - \psi) - \kappa \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

$$\leftarrow F = \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa}$$

$$f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} \{(\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi)\} = 0$$

$$\psi - \psi_0 = \lambda_\alpha \ln \frac{t}{t_0} = \lambda_\alpha \ln \frac{(-\dot{\epsilon})_0^p}{(-\dot{\epsilon})^p}$$

$$d\rho = -\{G(\rho) + Q(\omega)\} \cdot d(-e)^p$$

適応条件 ($df = 0$)

$$d(-e)^p = \frac{(\lambda - \kappa) \frac{d\sigma}{\sigma} + d\psi}{1 + G(\rho) + Q(\omega)}$$

$$d(-e) = d(-e)^p + \kappa \frac{d\sigma}{\sigma}$$

29

京川氏のprivate note (Dr thesis)

$$\square d(-e)^p = \frac{(\lambda - \kappa) \frac{d\sigma}{\sigma} + d\psi}{1 + G(\rho) + Q(\omega)}$$

$$\square d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial (-\dot{\epsilon})^p} d(-\dot{\epsilon})^p = -\lambda_\alpha \frac{1}{(-\dot{\epsilon})^p} d(-\dot{\epsilon})^p \left\langle \psi - \psi_0 = \lambda_\alpha \ln \frac{(-\dot{\epsilon})_0^p}{(-\dot{\epsilon})^p} \right\rangle$$

$$\square -\lambda_\alpha \frac{1}{(-\dot{\epsilon})^{p*}} \left\{ \frac{d(-e)^p}{dt} - (-\dot{\epsilon})^{p*} \right\} \quad (\text{where } (-\dot{\epsilon})^{p*} \text{ is } (-\dot{\epsilon})^p \text{ at previous step})$$

cf. original formulation:

$$d\psi \square (-\dot{\epsilon})^{p*} dt$$

$$d(-e)^p = \frac{(\lambda - \kappa) \frac{d\sigma}{\sigma}}{1 + G(\rho) + Q(\omega)} - \frac{\lambda_\alpha}{1 + G(\rho) + Q(\omega)} \left\{ \frac{1}{(-\dot{\epsilon})^{p*}} \frac{d(-e)^p}{dt} - 1 \right\}$$

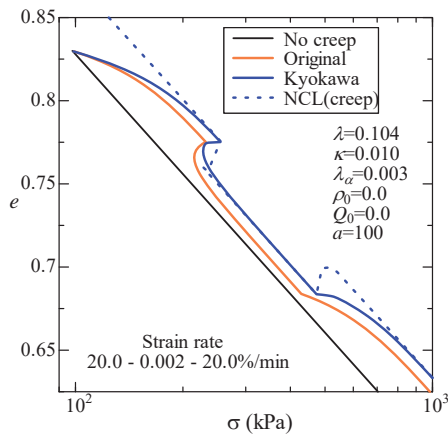
$$d(-e)^p = \frac{1}{1 + G(\rho) + Q(\omega) + \frac{\lambda_\alpha}{(-\dot{\epsilon})^{p*} dt}} \left\{ (\lambda - \kappa) \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{1 + G(\rho) + Q(\omega) + V((-e)^{p*})} \left\{ (\lambda - \kappa) \frac{d\sigma}{\sigma} + d\psi^* \right\}$$

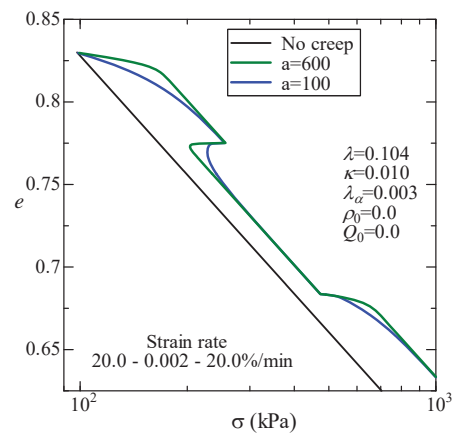
$$\left(\text{where } V((-e)^{p*}) = \frac{\lambda_\alpha}{(-\dot{\epsilon})^{p*} dt}, \quad d\psi^* = \lambda_\alpha \right)$$

30

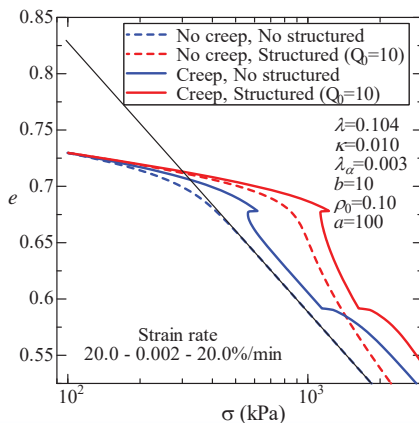
1次元問題の時間効果特性の解析



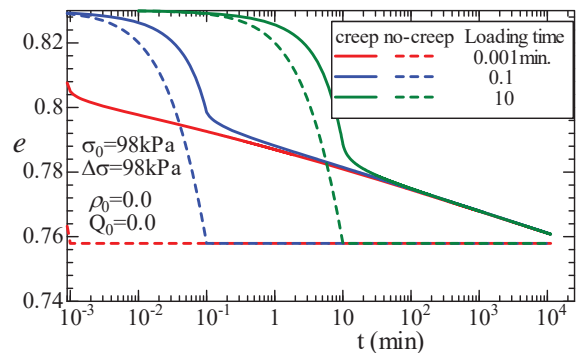
ひずみ速度効果に及ぼす ψ の発展則の影響



パラメータ a がひずみ速度に及ぼす影響



過圧密土および自然堆積土のひずみ速度効果



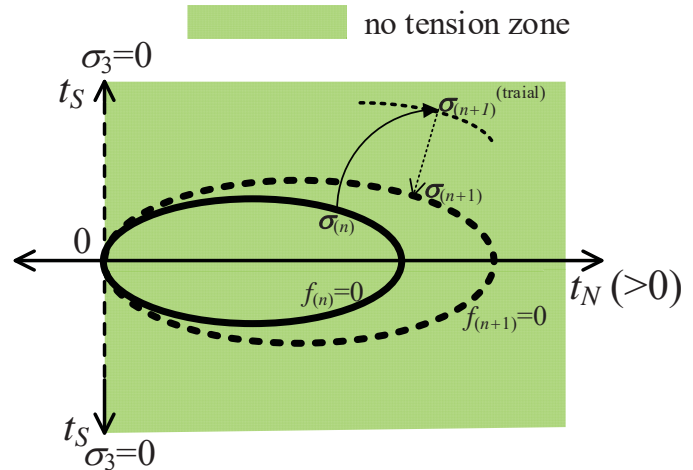
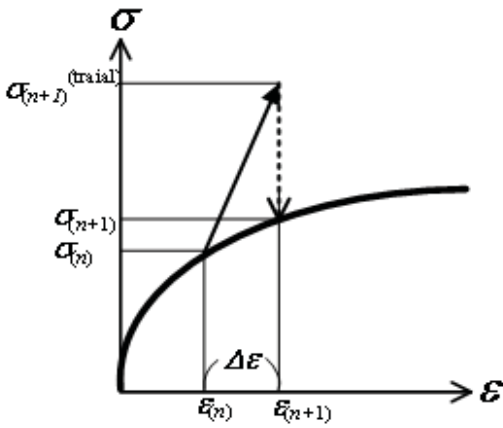
载荷速度効果およびその後のクリープ挙動 31

陰解法 (Return mapping)

- 計算の効率化と誤差の最小化

- 1) 時間効果特性がない場合
- 2) 時間効果特性がある場合

Return mappingアルゴリズムと弾性式



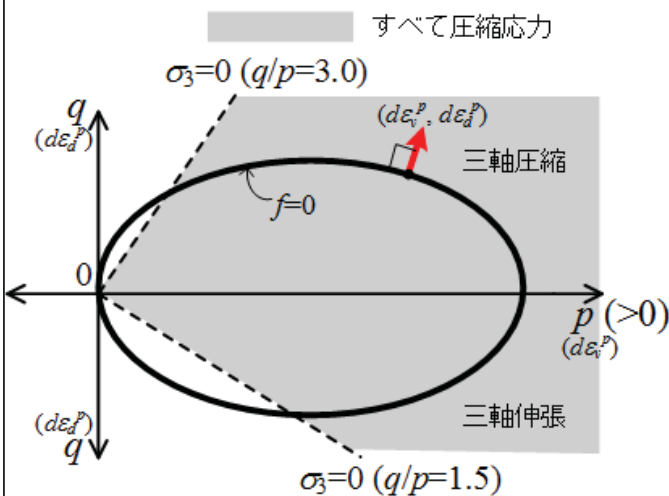
現状態を n とし、その時のひずみおよび応力を $\varepsilon_{(n)}$, $\sigma_{(n)}$ とする。この状態から、 $\Delta\varepsilon$ のひずみ増分を与えた状態を $n+1$ とする。Return mappingではまず $\Delta\varepsilon$ のひずみ増分はすべて弾性ひずみと仮定し、試行弾性状態の応力 $\sigma_{(n+1)}^{(trial)}$ を求め、その後 $n+1$ で降伏関数 $f_{(n+1)}=0$ を満たす応力状態がなるように解くことになる。



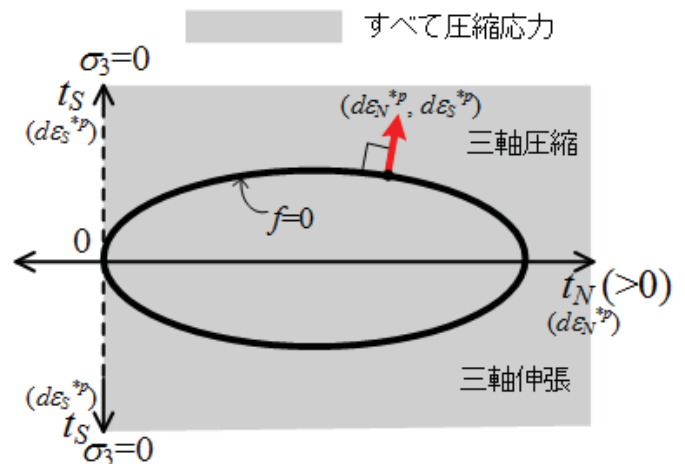
そこでは次の2条件を満たす必要がある:

- 応力あるいはひずみ経路によらず一義的に応力と弾性ひずみが決まる。
- 地盤材料は引張り応力に抵抗しないので、如何なるひずみ(塑性ひずみ、弾性ひずみ)が生じてても引張り応力は発生しない。

既往および t_{ij} の概念によるモデルの降伏曲面と応力の取り得る領域



(q, p)を応力パラメータとする弾塑性論の降伏曲面と流れ則



t_{ij} の概念に基づく(t_N, t_S)を応力パラメータとする弾塑性論の降伏曲面と流れ則

引張り応力の発生しない弾性式

弾性成分の特性:

$$1D: \quad \varepsilon = \frac{\kappa}{1+e_0} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

$$3D: \quad \begin{cases} \varepsilon^{(1)} \\ \varepsilon^{(2)} \\ \varepsilon^{(3)} \end{cases} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \ln(\sigma^{(1)}/p_a) \\ \ln(\sigma^{(2)}/p_a) \\ \ln(\sigma^{(3)}/p_a) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ln(\sigma^{(1)}/p_a) \\ \ln(\sigma^{(2)}/p_a) \\ \ln(\sigma^{(3)}/p_a) \end{cases} = \frac{S(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) \\ \nu/(1-\nu) & 1 & \nu/(1-\nu) \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon^{(1)} \\ \varepsilon^{(2)} \\ \varepsilon^{(3)} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)} = P_a \exp \left\{ \Delta \left(\varepsilon^{(1)} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(2)} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(3)} \right) \right\} \\ \sigma^{(2)} = P_a \exp \left\{ \Delta \left(\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(3)} \right) \right\} \\ \sigma^{(3)} = P_a \exp \left\{ \Delta \left(\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(1)} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)} \right) \right\} \end{cases} \quad (3) \quad \text{where, } \Delta = \frac{S(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4)$$

ここに、 $\sigma^{(1)}=\sigma^{(2)}=\sigma^{(3)}=P_a$ の時弾性ひずみをゼロとする(P_a : 大気圧)。
また、弾性ひずみの主軸の方向は主応力の方向と一致するとする。

中井・星川(1990): “粘性土の弾性ひずみの定式化について” 中部地盤工学シンポジウムより

35

提案弾性式の特徴

- 体積ひずみ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)} \\ &= \frac{1}{S} (1-2\nu) \left\{ \ln(\sigma^{(1)}/P_a) + \ln(\sigma^{(2)}/P_a) + \ln(\sigma^{(3)}/P_a) \right\} \\ &= \frac{1}{S} (1-2\nu) \ln \frac{\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}}{P_a^3} = \frac{1}{S} (1-2\nu) \ln \frac{I_3}{P_a^3} \end{aligned} \quad (5)$$

- 主応力 ($\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$) が ($\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)}, \sigma_0^{(3)}$) から $k(\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)}, \sigma_0^{(3)})$ に変化したとき

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \frac{1}{S} (1-2\nu) \left\{ \ln(k\sigma_0^{(1)}/\sigma_0^{(1)}) + \ln(k\sigma_0^{(2)}/\sigma_0^{(2)}) + \ln(k\sigma_0^{(3)}/\sigma_0^{(3)}) \right\} \\ &= \frac{1}{S} (1-2\nu) \ln \frac{k^3 \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sigma_0^{(3)}}{\sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sigma_0^{(3)}} = \frac{3}{S} (1-2\nu) \ln k \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{ここに、} \frac{3}{S} (1-2\nu) \text{ は } \frac{\kappa}{1+e_0} \text{ に対応するので、} S = \frac{3(1-2\nu)(1+e_0)}{\kappa} \quad (7)$$

応力比が変化しない応力経路下では弾性体積ひずみは勾配 $\kappa/(1+e_0)$ の $\varepsilon_v \propto \ln p$ 関係を満たす。

- 偏差ひずみ $\varepsilon^{(\alpha)} - \varepsilon^{(\beta)}$ ($\alpha \neq \beta$) は次式で与えられる

$$\varepsilon^{(\alpha)} - \varepsilon^{(\beta)} = \frac{1}{S} \left(\ln \frac{\sigma^{(\alpha)}}{P_a} - \nu \ln \frac{\sigma^{(\beta)}}{P_a} + \nu \ln \frac{\sigma^{(\alpha)}}{P_a} - \ln \frac{\sigma^{(\beta)}}{P_a} \right) = \frac{1}{S} (1+\nu) \ln \frac{\sigma^{(\alpha)}}{\sigma^{(\beta)}} \quad (8)$$

したがって、応力比一定条件下では弾性ひずみは常に等方的で、弾性偏差ひずみは応力比の変化だけで関係づけられる

36

速度形の提案弾性式

対称テンソル b_{kl} を独立変数とする対称テンソル値関数 $G_{ij}(b_{kl})$ の微分はそれぞれの固有値、固有値の微分および固有ベクトルを使って次式で計算できる(Miehe(1998))

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial b_{kl}} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial b^{(\beta)}} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} n_k^{(\beta)} n_l^{(\beta)} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \frac{G^{(\alpha)} - G^{(\beta)}}{b^{(\alpha)} - b^{(\beta)}} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\beta)} \frac{1}{2} \left(n_k^{(\alpha)} n_l^{(\beta)} + n_k^{(\beta)} n_l^{(\alpha)} \right)$$

ここに、 $G^{(\alpha)}$, $b^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, 3$)は対称テンソル G_{ij} , b_{kl} の固有値を、 $n_i^{(\alpha)}$ ($i=1,2,3$)は両テンソルの固有ベクトルを表す。

応力・ひずみ関係の速度形は次式で表せる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}$$

$\sigma^{(\alpha)}$, $\varepsilon^{(\alpha)}$ はそれぞれ $G^{(\alpha)}$, $b^{(\alpha)}$ に対応するので、 C_{ijkl} は次式で与えられる。

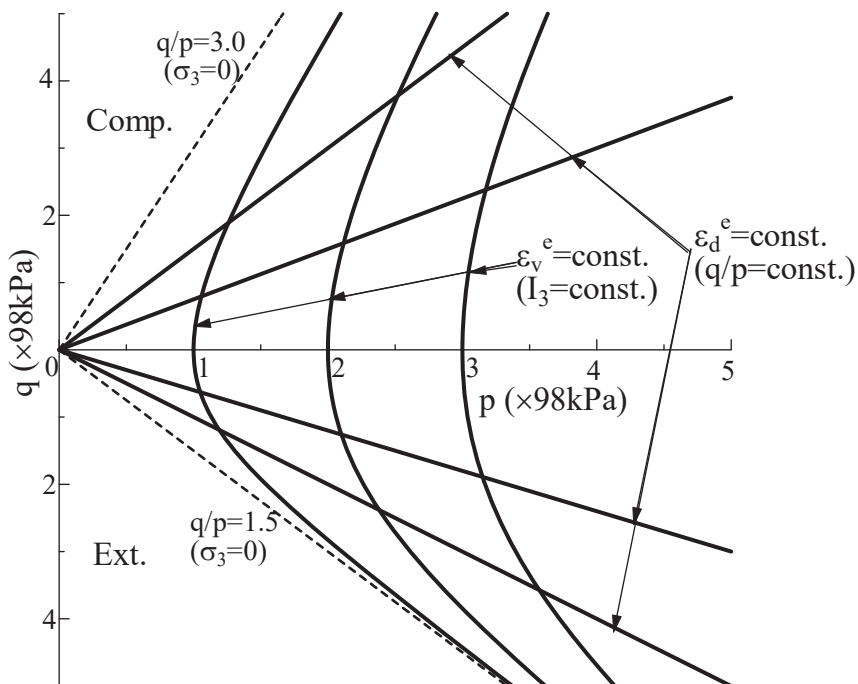
$$C_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \sigma^{(\alpha)}}{\partial \varepsilon^{(\beta)}} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} n_k^{(\beta)} n_l^{(\beta)} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \frac{\sigma^{(\alpha)} - \sigma^{(\beta)}}{\varepsilon^{(\alpha)} - \varepsilon^{(\beta)}} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\beta)} \frac{1}{2} \left(n_k^{(\alpha)} n_l^{(\beta)} + n_k^{(\beta)} n_l^{(\alpha)} \right)$$

ここに、 $\sigma^{(\alpha)}$ の $\varepsilon^{(\beta)}$ による微分は前出の(3), (4)式から次式となる

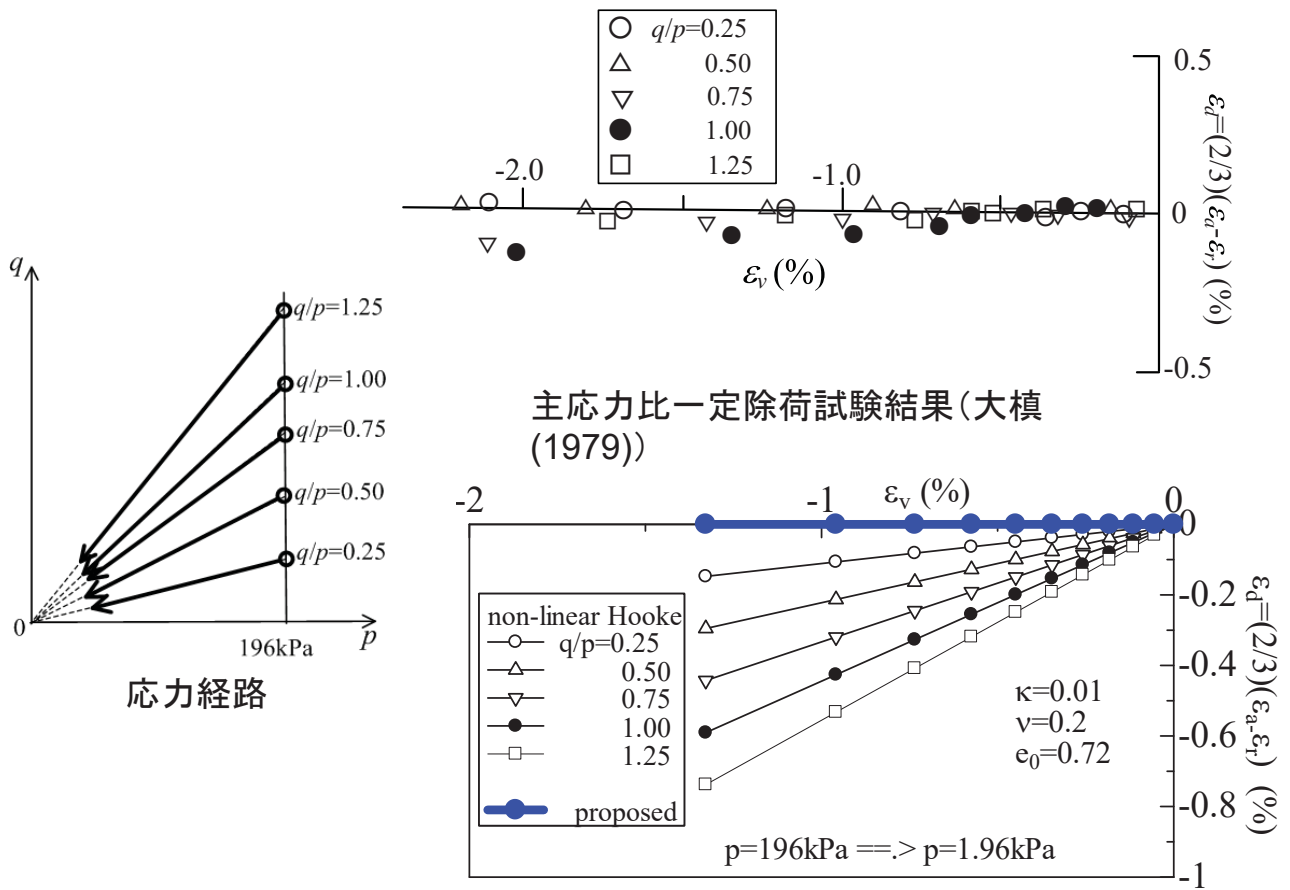
$$\frac{\partial \sigma^{(\alpha)}}{\partial \varepsilon^{(\beta)}} = \begin{cases} \Delta \cdot \sigma^{(\alpha)} & (\alpha = \beta) \\ \Delta \cdot \sigma^{(\alpha)} \frac{\nu}{1-\nu} & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

$\varepsilon^{(\alpha)} = \varepsilon^{(\beta)}$ の時はロピタルの定理を使って、 $(\sigma^{(\alpha)} - \sigma^{(\beta)}) / (\varepsilon^{(\alpha)} - \varepsilon^{(\beta)})$ を $\partial \sigma^{(\alpha)} / \partial \varepsilon^{(\alpha)} = \Delta \cdot \sigma^{(\alpha)}$ に置き換える。

(q, p)平面で表した提案弾性式の等 ε_v 線および等 ε_d 線

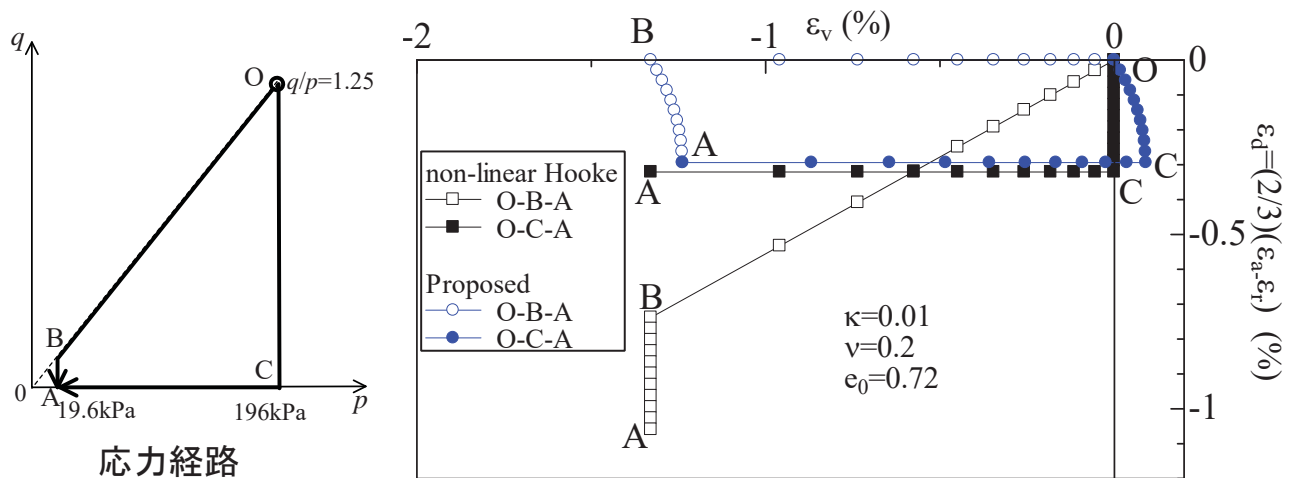


正規圧密粘土の応力比一定除荷試験と非線型Hooke則による解析



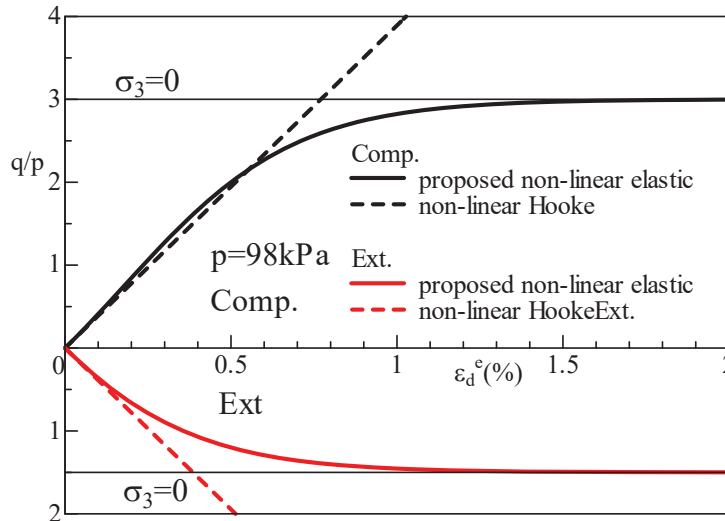
非線型Hooke則および提案弾性式による主応力比一定除荷試験の解析結果 39

異なる応力経路下での弾性ひずみの両弾性モデルによる解析結果



応力経路(O-B-A)および(OCA)下での弾性ひずみの解析結果

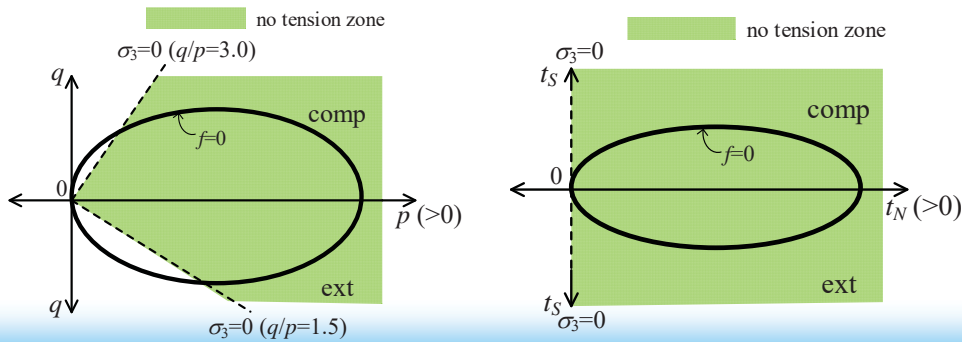
三軸圧縮および伸張条件下での解析結果と引張り応力の生じない領域



実線: 提案弾性式
破線: 非線形Hooke則

$p = \text{const.}$

$q/p \sim \varepsilon_d$ 関係 (上半分は3軸圧縮、下半分は3軸伸張)



41

Modelの基本式 (再掲)

$$\bullet d\varepsilon_{ij}^p = \frac{dF}{h^p} \cdot \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - \frac{k^{(IC)} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^m}{h^{p(IC)}} \cdot \frac{1}{t_N} dt_N \cdot \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} + \frac{k^{(IC)} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^m}{h^{p(IC)}} \cdot \frac{1}{t_N} dt_N \cdot \frac{\delta_{ij}}{3}$$

$$= \Lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} + L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \frac{\delta_{ij}}{3} \quad \left(\text{通常 } k^{(IC)} = 1, m = 2 \right)$$

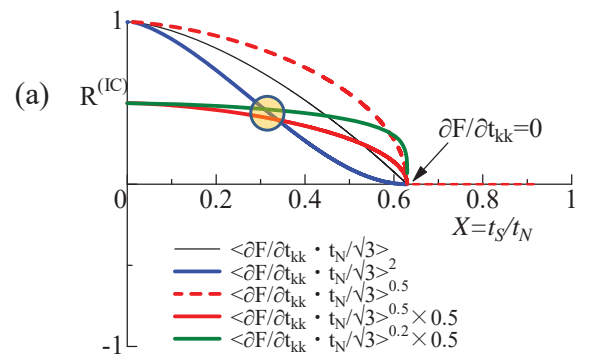
$$\left[\begin{aligned} \text{ここに, } h^p &= \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} + \sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} \\ h^{p(IC)} &= \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \left\{ 1 + \left\langle \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\rangle \right\} \\ L^{(IC)} &= \frac{R^{(IC)}}{h^{p(IC)}} = \frac{k^{(IC)} \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \right) / \left(t_N / \sqrt{3} \right) \right\rangle^m}{h^{p(IC)}} \end{aligned} \right. \quad \left(\text{通常 } k^{(IC)} = 1, m = 2 \right)$$

$$\bullet d\varepsilon_v^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \quad \text{(b)}$$

$$\bullet d\rho = -(1+e_0) \sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \Lambda \quad \text{(c)}$$

$$\bullet d\omega = -(1+e_0) \sqrt{3} Q \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Lambda \quad \text{(d)}$$

$$\bullet f = F - H - \frac{1}{\lambda-\kappa} (\rho_0 - \rho) = 0 \quad \text{(e)}$$



$$G = a\rho^{l_p}, \quad Q = b\omega \quad (\text{通常, } l_p = 1).$$

$$\left[\begin{aligned} F &= \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), \quad \zeta(X) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{X}{M^*} \right)^\beta \\ &\quad \left(\text{where } X = t_s / t_N \right) \\ H &= \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \end{aligned} \right. \quad 42$$

Return mapping のアルゴリズム(1)

① 弾性予測子：現状態を n とし、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ を与えた時 $n+1$ を試行弾性状態で評価する

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

$$\rho_{n+1}^{(trial)} = \rho_n, \quad \omega_{n+1}^{(trial)} = \omega_n \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{p(trial)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n}^p \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(trial)} = \mathbf{E}^e \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} \right) \quad (4)$$

$$\bullet \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} - L^{(IC)} \ln \frac{t_{N,n+1}}{t_{N,n}} \frac{\mathbf{N}_{n+1}}{\text{tr}(\mathbf{N}_{n+1})} + L^{(IC)} \ln \frac{t_{N,n+1}}{t_{N,n}} \mathbf{N}^{(IC)} = 0 \quad (5)$$

$$\bullet \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{p(trial)} - \Delta\gamma \cdot \text{tr}(\partial F / \partial \mathbf{t}) = 0 \quad (6)$$

$$\bullet \rho_{n+1} - \rho_{n+1}^{(trial)} - \Delta\gamma \left\{ -(1+e_0) \sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} = 0 \quad (7)$$

$$\bullet \omega_{n+1} - \omega_{n+1}^{(trial)} - \Delta\gamma \left\{ -(1+e_0) \sqrt{3} Q \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \right\} = 0 \quad (8)$$

$$\bullet f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^p, \rho_{n+1}, \omega_{n+1}) = F_{n+1} - H_{n+1} - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho_{n+1}) = 0 \quad (9)$$

式(5)~(9)を $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e, \rho_{n+1}, \omega_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^p, \Delta\gamma$ について解く。

また、 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ は $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{E}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)$ より決められる

② $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(trial)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{p(trial)}, \rho_{n+1}^{(trial)}, \omega_{n+1}^{(trial)}) \leq 0$ の時は弾性なので

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \omega_{n+1} = \omega_n \text{ とする}$$

43

Return mapping のアルゴリズム(2)

式(5)~(9)の各項は次式を意味する

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial F}{\partial t_{11}} \quad \frac{\partial F}{\partial t_{22}} \quad \frac{\partial F}{\partial t_{33}} \quad 2\frac{\partial F}{\partial t_{12}} \quad 2\frac{\partial F}{\partial t_{23}} \quad 2\frac{\partial F}{\partial t_{31}} \right)^T \quad (10)$$

$$\mathbf{N}^{(IC)} = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \quad (11)$$

$$L^{(IC)} = \frac{k^{IC} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^m}{h^{p(IC)}} = \frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^2}{h^{p(IC)}} \quad (12)$$

$$G = a\rho^{l_p}, \quad Q = b\omega \quad (13)$$

$$\text{tr}(\partial F / \partial \mathbf{t}) = \frac{\partial F}{\partial t_{11}} + \frac{\partial F}{\partial t_{22}} + \frac{\partial F}{\partial t_{33}} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} f &= F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) \\ &= \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \boldsymbol{\varepsilon}_v^p - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

44

直接積分で ω を求める

(8)式の $\omega = \omega_{n+1}$ は次のように直接積分して求める

$$d\omega = -(1+e_0)\sqrt{3}Q \left\| d\varepsilon_{ij}^p \right\| = -(1+e_0)\sqrt{3}Q \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| d\gamma, \quad Q = b\omega$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{b\omega} d\omega &= \int -(1+e_0)\sqrt{3} \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| d\gamma \\ \left[\frac{1}{b} \ln \omega \right]_{\omega_n}^{\omega} &= -(1+e_0)\sqrt{3} \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Delta\gamma \\ \ln \frac{\omega}{\omega_n} &= -b(1+e_0)\sqrt{3} \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Delta\gamma \\ \omega &= \omega_n \exp \left(-b(1+e_0)\sqrt{3} \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Delta\gamma \right) \end{aligned}$$

$$Q = b\omega$$

45

縮約したreturn mappingのアルゴリズム(1)

下添字の $n+1$ を省略して表示

$$\left[\begin{aligned} \bullet b_1 &= \varepsilon^e - (\varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon) + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left(\frac{\mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) = 0 \\ \bullet b_2 &= \rho - \rho_n - \Delta\gamma \left\{ -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a\rho^{l_p}/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} = 0 \\ \bullet b_3 &= \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \varepsilon_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr}\mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) = 0 \end{aligned} \right.$$

where,

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{23} \ \gamma_{31})^T$$

$$\mathbf{t} = (t_{11} \ t_{22} \ t_{33} \ t_{12} \ t_{23} \ t_{31})^T$$

$$\mathbf{N} = (\partial F / \partial t_{11} \ \partial F / \partial t_{22} \ \partial F / \partial t_{33} \ 2\partial F / \partial t_{12} \ 2\partial F / \partial t_{23} \ 2\partial F / \partial t_{31})^T$$

$$\mathbf{N}^{(IC)} = (1/3 \ 1/3 \ 1/3 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$F = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X)$$

$$\text{tr}\mathbf{N} = \text{tr}(\partial F / \partial \mathbf{t}) = \partial F / \partial t_{11} + \partial F / \partial t_{22} + \partial F / \partial t_{33}$$

$$G = a\rho^{l_p}, \quad Q = b\omega$$

$$L^{(IC)} = \frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^2}{h^{p(IC)}}$$

46

縮約したreturn mappingのアルゴリズム(2)

$$F = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial t_N} \frac{\partial t_N}{\partial t_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t_{ij}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_N} = \frac{1}{t_N}, \quad \frac{\partial F}{\partial X} = \zeta'(X), \quad \frac{\partial t_N}{\partial t_{ij}} = a_{ij}, \quad \frac{\partial X}{\partial t_{ij}} = \frac{1}{X \cdot t_N} (x_{ij} - X^2 a_{ij})$$

対称テンソルの微分 $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}_{klmn}$ は各々の固有値の微分と固有ベクトルを利用して求める
(等方テンソル値関数の微分法は前述の (Miehe(1997), Neto, Peric & Owen(2008)) を参照)

ここに、固有値の微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial a_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{\sqrt{I_3}}{\sqrt{I_2}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \right), \quad \frac{\partial t_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{\sqrt{I_3}}{\sqrt{I_2}} \sqrt{\sigma_i} \right) \quad \text{where } I_2, I_3: 2\text{nd and 3rd stress invariants}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{t_i}{t_N} - a_i \right)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial (\partial F / \partial t_i)}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left\{ \frac{a_i}{t_N} + \zeta'(X) \frac{1}{X \cdot t_N} (x_i - X^2 a_i) \right\}$$

$$= \frac{1}{t_N} \frac{\partial a_i}{\partial \sigma_j} + a_i \frac{\partial (1/t_N)}{\partial \sigma_j} + \frac{\partial \zeta'(X)}{\partial \sigma_j} \frac{1}{X \cdot t_N} (x_i - X^2 a_i) + \zeta'(X) \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{x_i}{X \cdot t_N} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{X a_i}{t_N} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial \text{tr} \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = M_{11mn} + M_{22mn} + M_{33mn}$$

47

縮約したreturn mappingのアルゴリズム(3)

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{I} + \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} - L^{(IC)} \left(\frac{\mathbf{N}}{\text{tr} \mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) \frac{1}{t_N} \frac{\partial t_N}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{N} \frac{\partial \text{tr} \mathbf{N}}{(\text{tr} \mathbf{N})^2} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

$$- \left(\frac{\mathbf{N}}{\text{tr} \mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \frac{\partial L^{(IC)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

where

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \Delta \gamma} = \mathbf{N}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = -\Delta \gamma (1 + e_0) \sqrt{3} \left\{ \left(\frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N^2} \right) \frac{\partial t_N}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{G k_a / (1+k_a X)^2 + Q k_b / (1+k_b X)^2}{t_N} \right) \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \Delta \gamma} = (1 + e_0) \sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N}$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \rho} = 1 + \Delta \gamma (1 + e_0) \sqrt{3} \frac{a_l \rho^{l_p - 1}}{t_N (1 + k_a X)}$$

48

縮約したreturn mappingのアルゴリズム(4)

$$\begin{cases} \frac{\partial b_3}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{1}{t_N} \frac{\partial t_N}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \zeta'(X) \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} - \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \Delta\gamma \frac{\partial \text{tr}\mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \\ \frac{\partial b_3}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \text{tr}\mathbf{N} \\ \frac{\partial b_3}{\partial \rho} = \frac{1}{\lambda-\kappa} \end{cases}$$

where,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} &= \mathbf{D}^e = D_{ijkl}^e \\ \mathbf{N} &= \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^e - (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left(\frac{\mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) \\ \rho - \rho_n + \Delta\gamma(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a\rho^{l_p}/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \\ \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr}\mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda-\kappa} (\rho_0 - \rho) \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^e \\ \Delta\gamma \\ \rho \end{cases}$$

49

として、 $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ の非線形連立方程式をNewton法で解く。

縮約したreturn mappingのアルゴリズム(5)

ここに、 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ のJacobian $\mathbf{J} = \mathbf{b}'(\mathbf{x})$ は

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} & \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} & \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \mathbf{b}_3}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} & \frac{\partial \mathbf{b}_3}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{b}_3}{\partial \rho} \end{bmatrix}$$

で与えられるので、Newton法の漸化式は次式で表せる。

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - (\mathbf{J}^k)^{-1} \mathbf{b}^k$$

上式を反復的に収束判定を満たすまで解けばよい。

50

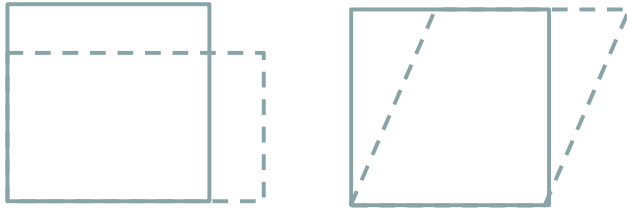
解析条件(藤森粘土)

平面ひずみ条件での非排水せん断 ($p_0=98\text{kPa}$)

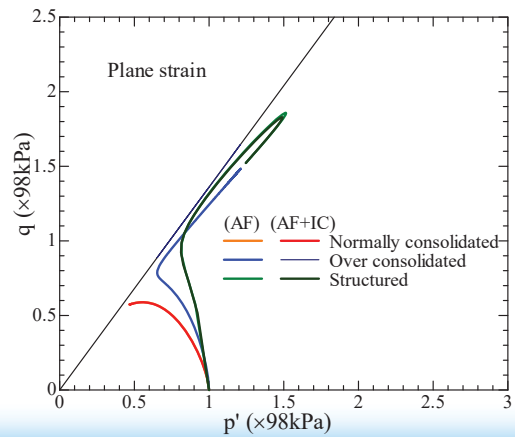
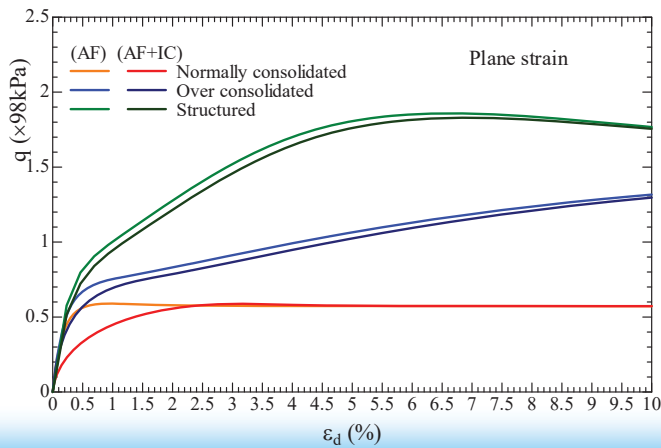
(a) 正規圧密粘土 ($e_0=0.83$)

(b) 過圧密粘土 ($e_0=0.73$)

(c) 構造化した粘土 ($e_0=0.73, Q_0=10.0(\omega_0=1.0)$)

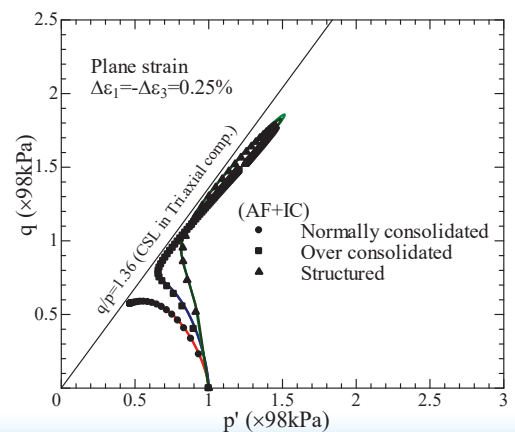
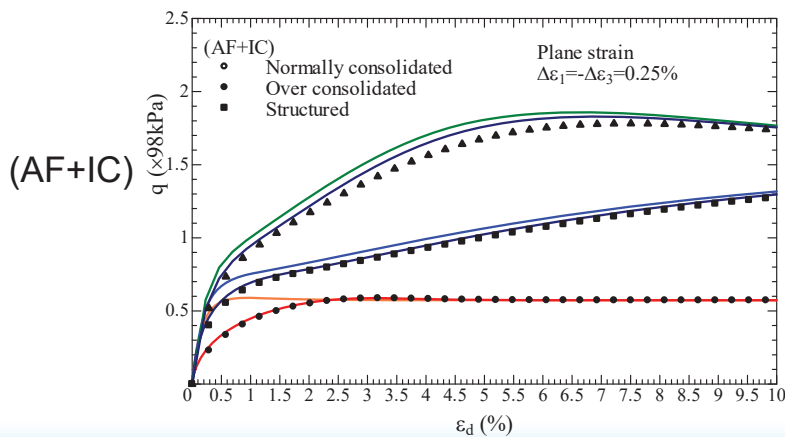
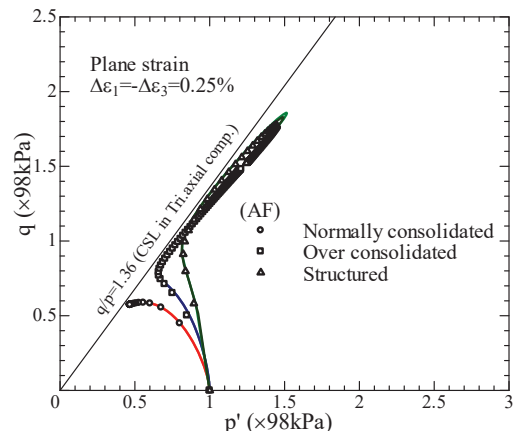
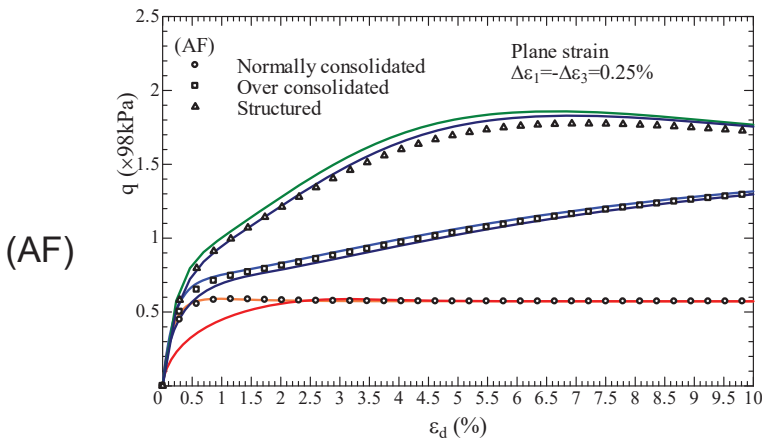


λ	0.104	Same parameters as Cam clay model
κ	0.010	
e_{NC} at $p=98\text{ kPa}$ & $q=0\text{ kPa}$	0.83	
$R_{cs} = (\sigma'_1/\sigma'_3)_{cs(comp)}$	3.5	
ν_e	0.2	Shape of yield surface
β	1.5	
a	100	Influence of density and confining pressure
k_a	8	
b	10	Influence of bonding
k_b	3	



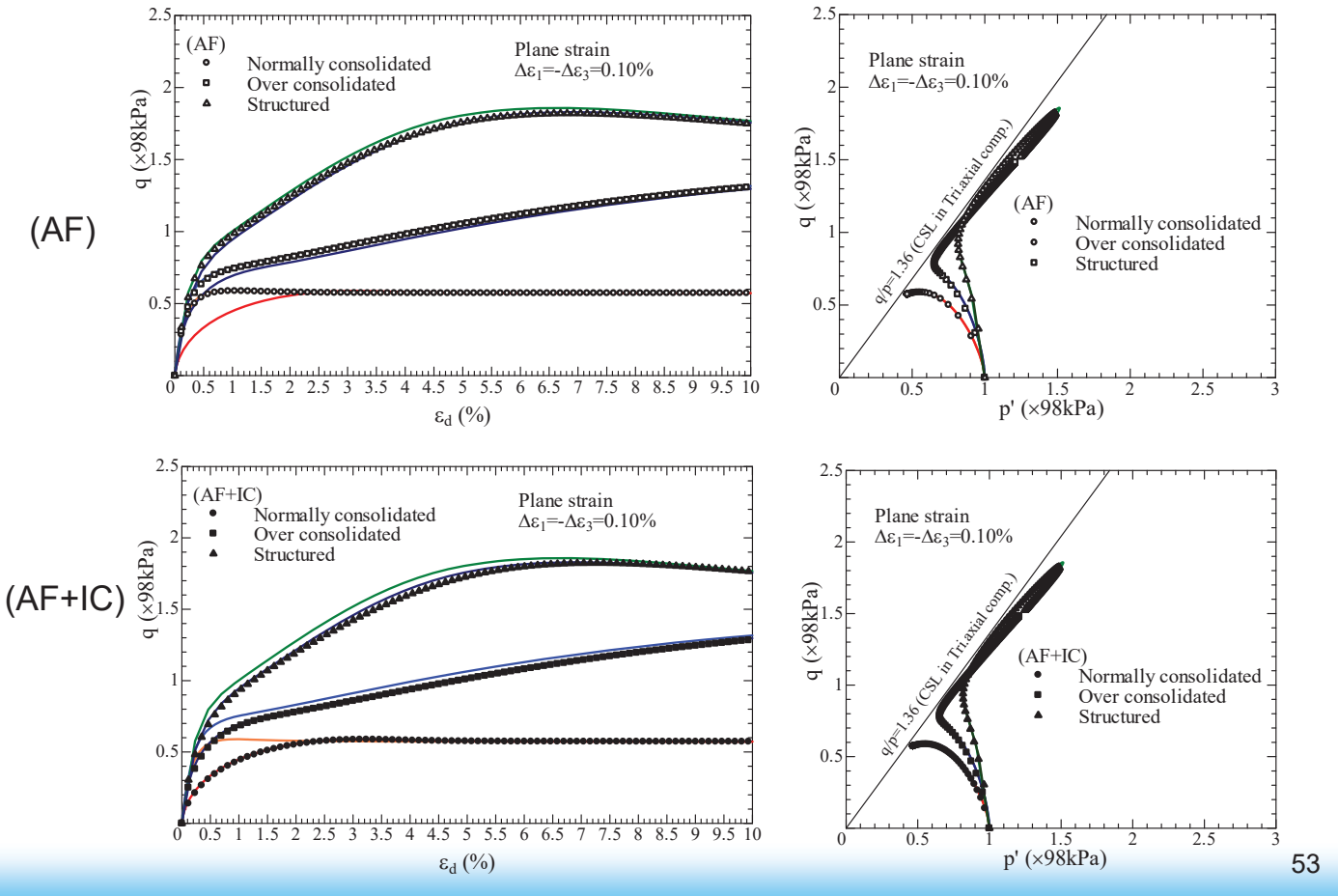
51

解析結果($\Delta\varepsilon_1=0.25\%$)

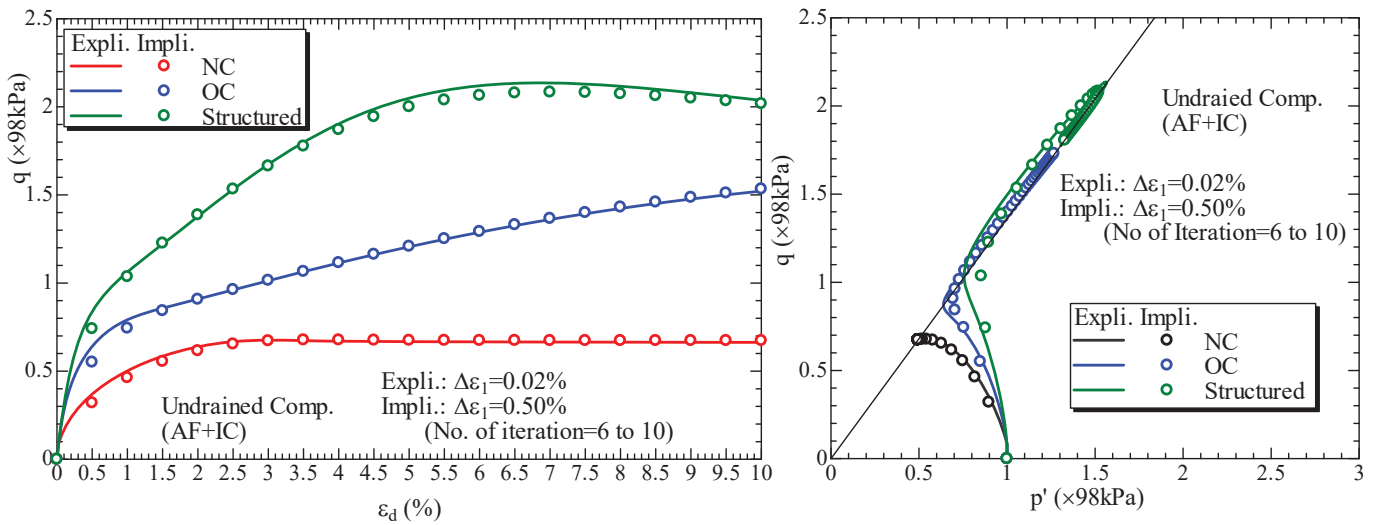


52

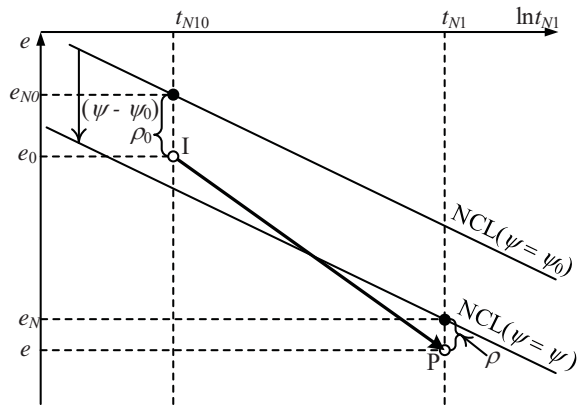
解析結果($\Delta\varepsilon_1=0.10\%$)



非排水三軸圧縮試験の陽解法および陰解法の解析



時間効果特性を考慮したモデルへの拡張(1)

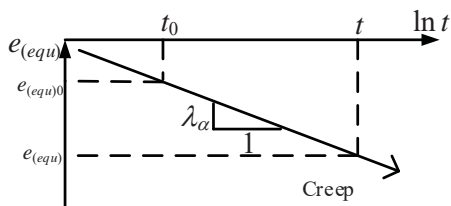


初期状態(I点)および現状態(P点)における
間隙比と ρ , ψ の関係

$$\begin{aligned} (-\Delta e)^p &= (e_0 - e) - (-\Delta e)^e \\ &= \left\{ (e_{N0} - e_N) - (-\Delta e)^e \right\} - (\rho_0 - \rho) \\ &= \left\{ (\lambda - \kappa) \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} + (\psi - \psi_0) \right\} - (\rho_0 - \rho) \end{aligned}$$

$$f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} \left\{ (\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi) \right\} = 0$$

$$\begin{cases} F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), & \zeta(X) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{X}{M^*} \right)^\beta \\ \quad \text{(where } X = t_s / t_N) \\ H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \end{cases}$$



正規圧密土のCreep特性

$$\begin{cases} \psi = \lambda_\alpha \ln t \\ \psi_0 = \lambda_\alpha \ln t_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi = -\lambda_\alpha \ln(-\dot{e})_{(equ)}^p \\ \psi_0 = -\lambda_\alpha \ln(-\dot{e})_{(equ)0}^p \end{cases}$$

$$\begin{cases} \because \psi - \psi_0 = e_{(equ)0} - e_{(equ)} = \lambda_\alpha \ln(t/t_0) \\ \dot{\psi} = -\dot{e}_{(equ)} = \lambda_\alpha / t \end{cases}$$

ここに、 $(-\dot{e})_{(equ)}^p = \sqrt{3}(1 + e_0) \|\dot{\varepsilon}_{ij}^p\| = \sqrt{3}(1 + e_0) \|d\varepsilon_{ij}^p\|/dt$
(等方圧縮時に $(-\dot{e})_{(equ)}^p = (-\dot{e})^p$ となる)

55

時間効果特性を考慮したモデルへの拡張(2)

ψ の ε^e , $\Delta\gamma$, ρ による微分は次式で表せる

$$\begin{aligned} \psi &= -\lambda_\alpha \ln(-\dot{e})_{(equ)}^p \\ &= -\lambda_\alpha \ln \left\{ \sqrt{3}(1 + e_0) \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \cdot \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \right\} = -\lambda_\alpha \ln \left\{ \sqrt{3}(1 + e_0) \|\mathbf{N}\| \cdot \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \right\} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} &= -\lambda_\alpha \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \frac{\partial \|\mathbf{N}\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varepsilon^e}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \Delta\gamma} = -\lambda_\alpha \frac{1}{\Delta\gamma}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bullet b_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \frac{\mathbf{N}}{\text{tr} \mathbf{N}} + L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \mathbf{N}^{(IC)} = 0 \\ \bullet b_2 = \rho - \rho_n - \Delta\gamma \left\{ -(1 + e_0) \sqrt{3} \frac{a \rho^{l_p} / (1 + k_a X) + Q / (1 + k_b X)}{t_N} \right\} = 0 \\ \bullet b_3 = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \varepsilon_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr} \mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda - \kappa} \left\{ (\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi) \right\} = 0 \\ \bullet b_4 = \psi - \psi_n - \Delta\psi = 0 \end{cases}$$

縮約して

$$\begin{cases} \bullet b_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \frac{\mathbf{N}}{\text{tr} \mathbf{N}} + L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \mathbf{N}^{(IC)} = 0 \\ \bullet b_2 = \rho - \rho_n - \Delta\gamma \left\{ -(1 + e_0) \sqrt{3} \frac{a \rho^{l_p} / (1 + k_a X) + Q / (1 + k_b X)}{t_N} \right\} + \psi - \psi_n - \Delta\psi = 0 \\ \bullet b_3 = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \varepsilon_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr} \mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda - \kappa} \left\{ (\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi) \right\} = 0 \end{cases}$$

56

時間効果特性を考慮したモデルへの拡張(3)

$$d\psi = -\lambda_\alpha \frac{1}{(-\dot{e})_{(equ)}^p} d(-\dot{e})_{(equ)}^p$$

$$\Delta\psi = -\lambda_\alpha \frac{1}{(1-b)(-\dot{e})_{(equ),n}^p + b(-\dot{e})_{(equ)}^p} \{(-\dot{e})_{(equ)}^p - (-\dot{e})_{(equ),n}^p\} \quad (\text{where } 0 \leq b \leq 1, \text{ usually } b = 0.5)$$

$$= -\lambda_\alpha \frac{R-1}{1-b+bR} \quad \text{where } R = \frac{(-\dot{e})_{(equ)}^p}{(-\dot{e})_{(equ),n}^p} = \frac{\sqrt{3}(1+e_0)\|\mathbf{N}\|\Delta\gamma}{(-\dot{e})_{(equ),n}^p \Delta t}$$

$$\left\{ \frac{\partial \Delta\psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = -\lambda_\alpha \frac{1}{(1-b+bR)^2} \frac{\sqrt{3}(1+e_0)\Delta\gamma}{(-\dot{e})_{(equ),n}^p \Delta t} \frac{\partial \|\mathbf{N}\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right.$$

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial \Delta\gamma} = -\lambda_\alpha \frac{1}{(1-b+bR)^2} \frac{\sqrt{3}(1+e_0)\|\mathbf{N}\|}{(-\dot{e})_{(equ),n}^p \Delta t}$$

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial \rho} = 0$$

弾塑性、弾性状態に拘わらず現応力状態は常に降伏曲面上にあるので ρ はNCLのシフトを考慮して

$$f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} \{(\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi)\} = 0 \quad \left(\text{where } F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), \quad H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \right)$$



$$\rho = \rho_0 - (\lambda - \kappa) \ln(t_{N1}/t_{N0}) + \varepsilon_v^p (1+e_0) + (\psi_0 - \psi)$$

57

等方圧縮時の時間効果特性の解析(正規圧密土)

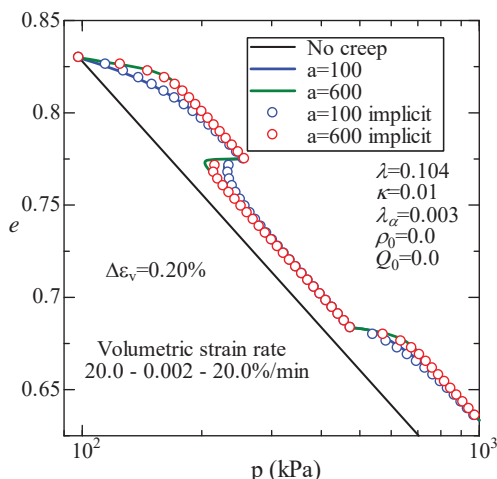
正規圧密粘土の定ひずみ圧縮試験およびクリープ試験の解析

時間効果特性に関する材料パラメータ

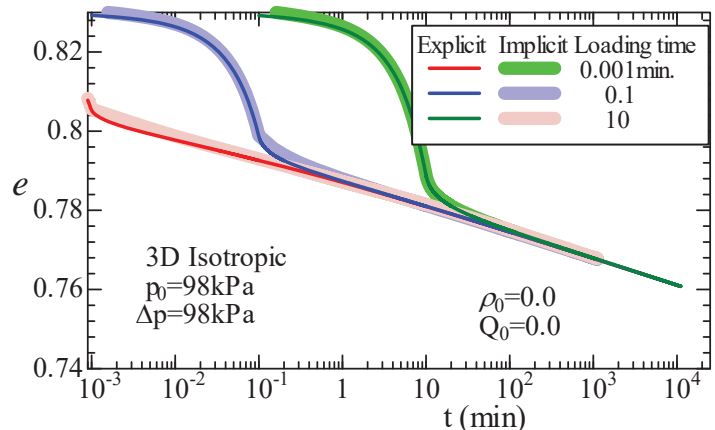
2次圧密係数 $\lambda_\alpha = 0.003$

初期条件(換算間隙比の塑性変化速度)

$(-\dot{e})_{(equ)0}^p = (-\dot{e})_{(equ)ref}^p = 1 \times 10^{-7} \text{ \%}/\text{min}$



ひずみ速度を変えた定ひずみ速度試験

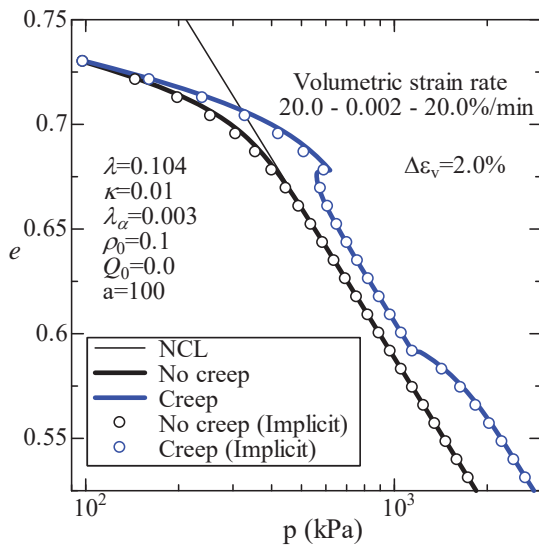


等方圧縮後のクリープ試験

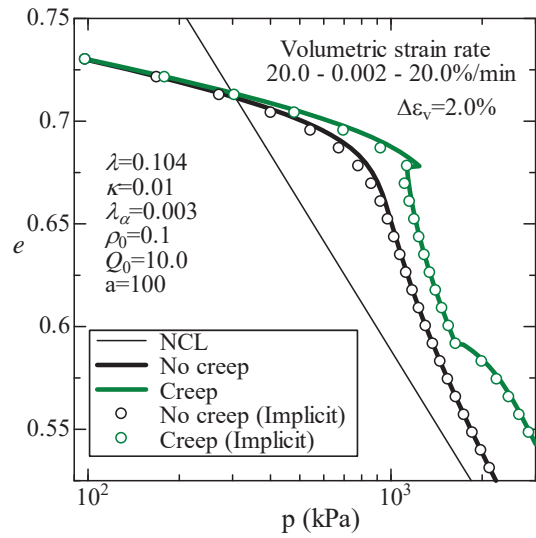
58

等方圧縮時の時間効果特性の解析(過圧密土、自然堆積土)

ひずみ速度を変えた定ひずみ速度試験



過圧密土



自然堆積土

せん断時の時間効果特性の解析(正規圧密土)

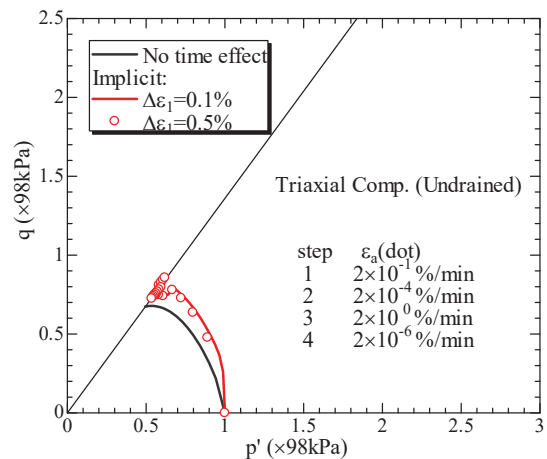
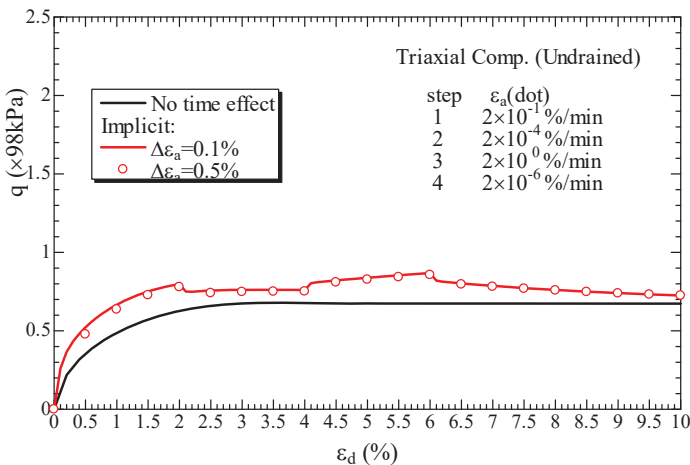
ひずみ速度を段階的に変えた非排水三軸圧縮試験の解析

時間効果特性に関する材料パラメータ

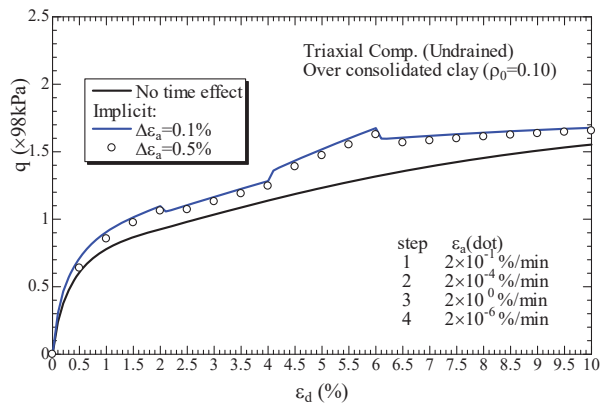
2次圧密係数 $\lambda_\alpha = 0.003$

初期条件(換算間隙比の塑性変化速度)

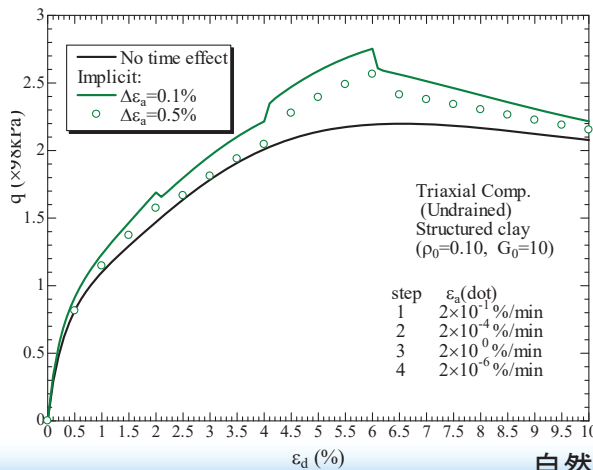
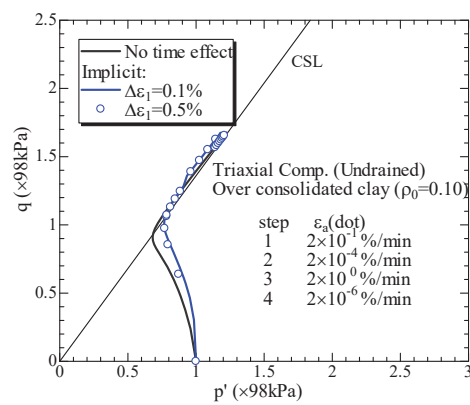
$$(-\dot{e})_{(equ)0}^p = (-\dot{e})_{(equ)ref}^p = 1 \times 10^{-7} \%/\text{min}$$



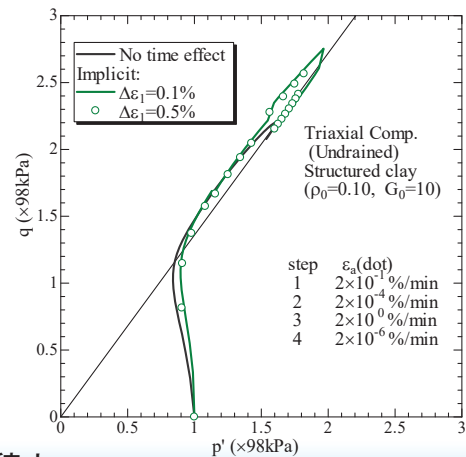
せん断時の時間効果特性の解析(過圧密土、自然堆積土)



過圧密土



自然堆積土



61

まとめ

Subloading t_{ij} modelは、3つの考え方に基づいてモデル化してる。その結果、正規圧密土・過圧密土・自然堆積土の種々の応力経路下の3次元挙動をを共通の材料パラメータで説明できる。

(1) t_{ij} の概念

- 中間主応力が変形・強度特性におよぼす影響
- 引張り応力の発生しない構成モデル

(2) 下負荷面とその応用

- ひずみ硬化中の正のダイレイタンス
- 変形・強度特性におよぼす密度(間隙比)や拘束応力の影響
- 自然堆積土等に見られる構造の発達した土の挙動
- 時間効果特性すなわちレオロジー特性

(3) 塑性ひずみ増分のsplit

- ひずみ増分方向におよぼす応力増分方向の影響

現在、PLAXISのUDSMとして陽解法のSubloading t_{ij} modelを提供しているが、より効率的に精度よく地盤の諸問題の解析に適用するため陰解法によるUDSMも開発中である。

学生時代に指導教授から教わった一言 “Garbage in, garbage out”

62

参考文献(1)

- 1) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. (2000a): Superloading yield surface concept for highly structured soil behavior, *Soils and Foundations*, **40**(2), 99-110.
- 2) Hashiguchi, K. and Ueno, M. (1977): Elasto-plastic constitutive laws for granular materials, constitutive equations for soils, Proc. of Specialty Session 9, 9th International Conf. on Soil Mech. and Foundation Eng., Tokyo, 73-82.
- 3) Hashiguchi, K. (1980): Constitutive equation of elastoplastic materials with elasto-plastic transition, *Jour. of Appli. Mech., ASME*, **102**(2), 266-272.
- 4) Matsuoka, H. and Nakai, T. (1974): Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, *Proc. of JSCE*, **232**, 59-70.
- 5) Murayama, S. (1964): A theoretical consideration on a behavior of sand, *Proc. of IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mechanics*, Grenoble, 146-159.
- 6) Nakai, T. and Mihara, Y. (1984): A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, *Soils and Foundations*, **24**(2), 82-94.
- 7) Nakai, T. and Hinokio, T. (2004): A simple elastoplastic model for normally and over consolidated soils with unified material parameters, *Soils and Foundations*, **44**(2), 53-70.
- 8) 中井照夫 (2011): 地盤材料の構成モデル最前線 – 2.弾塑性論の解説とカムクレイモデルの適用性, *地盤工学会誌, 講座*, **59**(4), 47-55.
- 9) 中井照夫 (2011): 地盤材料の構成モデル最前線 – 7.3主応力条件下での材料特性のモデル化, *地盤工学会誌, 講座*, **59**(9), 66-75.
- 10) Nakai T., Shahin H.M., Kikumoto M., Kyokawa H., Zhang F. and Farias, M.M. (2011a): A simple and unified one-dimensional model to describe various characteristics of soils, *Soils and Foundations*, **51**(6), 1129-1148.
- 11) Nakai T., Shahin H.M., Kikumoto M., Kyokawa H., Zhang F. and Farias, M.M. (2011b): A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils, *Soils and Foundations*, **51**(6), 1149-1168.

63

参考文献(2)

- 12) Nakai T., Shahin H.M., Kikumoto M., Kyokawa H., Zhang F. and Farias, M.M. (2011b): A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils, *Soils and Foundations*, **51**(6), 1149-1168.
- 13) Nakai, T. (2012): *Constitutive Modeling of Geomaterials: Principles and Applications*, CRC Press.
- 14) 中井照夫(2018): 巨視的および微視的観点から見た t_{ij} の概念の意義, *地盤工学会誌*, **66**(7), 18-21.
- 15) 中井照夫・Shahin H.M.・石川 明(2018): 引張り応力の発生しない地盤材料の弾性式, *第53回地盤工学研究発表会*, 369-370
- 16) Nakai T. and Shahin H.M. (2019): A simple method to describe stress path dependency of plastic flow, *Proc. of 16th Asian Regional Conf. on SMGE*, Taipei
- 17) 中井照夫・Shahin H.M. (2019): Subloading t_{ij} model の陰解法計算アルゴリズム, *第54回地盤工学研究発表会*, 369-370
- 18) 中井照夫・Shahin H.M.・高橋寛臣・戸田圭彦(2020): Subloading t_{ij} model の陰解法計算アルゴリズム (その2), *第75回土木学会年次講演会*
- 19) Nakai・Shahin・Ishikawa(2019): Rational modeling of elastic behavior in 3D condition, *Proc. of IS-Glasgow*, Glasgow
- 20) Miehe C (1998): Comparison of two algorithm for the computation of fourth-order isotropic tensor functions, *Computer and Structure*, **66**(1), 37-43.
- 21) Pedoroso D.M., Farias M.M. and Nakai T. (2005): An interpretation of subloading t_{ij} model in the context of conventional elastoplasticity theory, *Soils and Foundations*, **45**(4), 61-77.
- 22) Roscoe K.H., Burland J.B. (1968): On the generalized stress-strain behavior of wet clay, In *Engineering Plasticity*, Cambridge University Press, 535-609.
- 23) Souza *et al.*; 寺田他訳, (2008; 2012): *Computational Methods for plasticity; 非線形有限要素法*, John Wiley & Sons; 森北出版
- 24) Schofield, A. N. and Wroth, C. P. (1968): *Critical State Soil Mechanics*, McGraw- Hill.

64